

Природа тёмной материи

Лекция 8

Основные моменты в ранней Вселенной

Название эпохи и соответствующие ей физические процессы	Время, сек	Температура, К
Рождение классического пространства - времени	10^{-43}	10^{32}
Стадия инфляции	$\sim 10^{-42} - 10^{-35}$	$\sim 10^{32} - 10^{29}$
Рождение вещества	10^{-35}	$\sim 10^{29}$
Рождение барионного избытка	10^{-35}	$\sim 10^{29}$
Электрослабый фазовый переход	10^{-10}	$\sim 10^{17} - 10^{16}$
Конфайнмент кварков	10^{-4}	$\sim 10^{13} - 10^{12}$
Первичный нуклеосинтез	1-200	$\sim 10^{10} - 10^9$

Начнём рассматривать эволюцию с этого момента



Температура $10^{11} - 10^{12}$ эВ

Некоторые свойства элементарных частиц

Частица		Обозначение	Энергия покоя, МэВ	Температурный порог, 10^6 градусов	Эффективное число степеней свободы	Время жизни, сек
Фотон		γ	-	-	$1 \times 2 \times 1 = 2$	Стабилен
Лептоны	Нейтрино	$\nu_e, \bar{\nu}_e$	-	-	$2 \times 1 \times 7/8 = 7/4$	Стабилен
		$\nu_\alpha, \bar{\nu}_\alpha$	-	-	$2 \times 1 \times 7/8 = 7/4$	Стабилен
	Электрон	e^-, e^+	0.5110	5.930	$2 \times 2 \times 7/8 = 7/2$	Стабилен
	Мюон	μ^-, μ^+	105.66	1226.2	$2 \times 2 \times 7/8 = 7/2$	2.197×10^{-6}
Адроны	Пи – мезон	π^0	134.96	1566.2	$1 \times 1 \times 1 = 1$	0.8×10^{-16}
		π^-, π^+	139.57	1619.7	$2 \times 1 \times 1 = 2$	2.6×10^{-8}
	Протон	p, \bar{p}	938.26	10888	$2 \times 2 \times 7/8 = 7/2$	Стабилен
	Нейтрон	n, \bar{n}	939.55	10903	$2 \times 2 \times 7/8 = 7/2$	920

Начальное состояние первичной плазмы после конфайнмента кварков

- $T = 10^{11}$ К
- Несмотря на расширение, Вселенная находится в почти идеально равновесном состоянии и включает в заметно количестве только электроны, позитроны, гамма и нейтрино.
- Плотность вещества настолько велика, что даже нейтрино находятся в состоянии термодинамического равновесия с другими частицами.
- При таких энергиях электроны и позитроны ведут себя как излучение. Вклад электронов и позитронов в плотность энергии Вселенной составляет $7/4$ от вклада фотонов. Столько же вносят нейтрино и антинейтрино. Поэтому полная плотность энергии Вселенной отличается от плотности истинного излучения на коэффициент $7/4+7/4+1 = 9/2$.
- Согласно закону Стефана-Больцмана можно вычислить плотность энергии излучения при данной температуре – $4.72e44$ эВ/см³. Тогда полная плотность энергии – $2.1e45$ эВ/см³.
- Радиус наблюдаемой Вселенной в этот момент около 1 светового года.

Тепловая эволюция

- 3) Объекты на больших красных смещениях
- 4) Тепловая эволюция
 - Предположения
 - Свойства идеальных квантовых газов
 - Адиабатическое расширение идеальных газов
 - Freeze-Out частиц (выход из термодинамического равновесия)
 - Фон нейтрино
 - Переход от радиационной стадии к пылевой
 - Холодная, горячая и тёплая тёмная материя
 - Закалка тяжёлых реликтовых частиц
- 5) Первые 3 минуты и первичный нуклеосинтез

Предположения

- Вселенная расширяется адиабатически, что требует гипотеза об изотропии (исключая стадию инфляции).
При нарушении адиабатичности во Вселенной могут возникать и быстро увеличиваться направленные потоки «тепла» (вещества). Это означает, что генерация энтропии невелика.
Условие не является обязательным, но на практике выполняется.
- Тепловое равновесие может поддерживаться несмотря на расширение – зависит от частоты столкновения частиц.
Можно использовать уравнения термодинамики для случая термодинамического равновесия.
Однако, это условие может не выполняться для частиц тёмной материи!
- Космические «жидкости» (электроны, фотоны, частицы тёмной материи и др.) можно рассматривать как идеальные газы.
Это не совсем верно из-за наличия дальнедействующего электромагнитного взаимодействия, однако, если рассмотреть локальное возмущение плотности, оно будет электрически нейтральным из-за притяжения в эту области как протонов, так и электронов. Эффективный радиус электромагнитного взаимодействия не будет подчиняться закону $1/r$.

Свойства идеальных квантовых газов

- Для релятивистских бозонных и фермионных идеальных газов в тепловом равновесии справедливы соотношения:

концентрация частиц

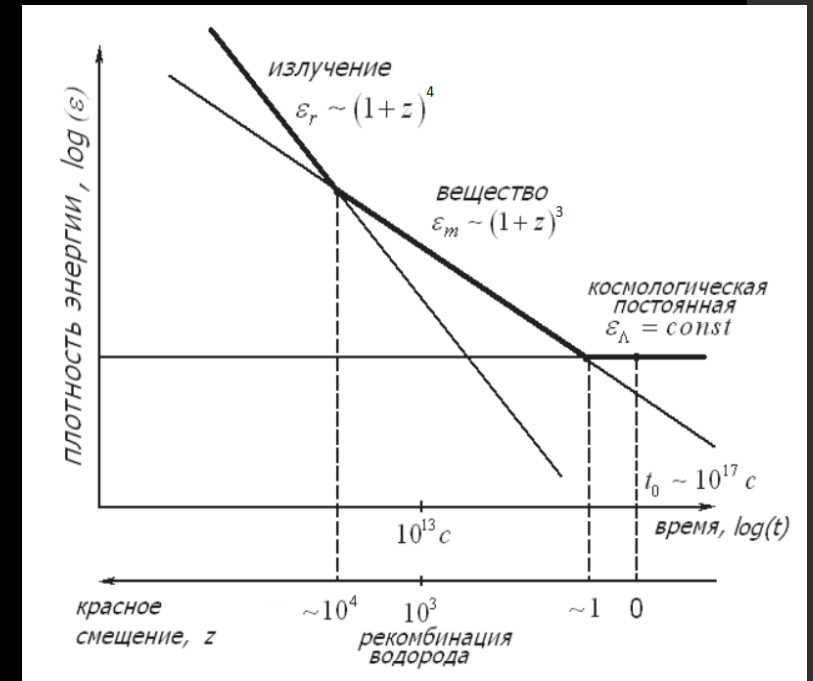
$$n_B = 10 g_B \left(\frac{T}{K} \right)^3 \text{ см}^{-3} = 1.6 \cdot 10^{13} g_B \left(\frac{k_B T}{eV} \right)^3 \text{ см}^{-3}$$

$$n_F = \frac{3}{4} \frac{g_F}{g_B} n_B$$

плотность энергии

$$u_B = 3.8 \cdot 10^{-15} g_B \left(\frac{T}{K} \right)^4 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = 2.35 \cdot 10^{-3} g_B \left(\frac{k_B T}{eV} \right)^4 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$$

$$u_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} u_B$$



Изменение плотности энергии различных компонентов Вселенной со временем, отсчитываемым от начала расширения.

Свойства идеальных квантовых газов

- Для релятивистских бозонных и фермионных идеальных газов в тепловом равновесии справедливы соотношения:

давление частиц

$$P_B = \frac{u_B}{3}$$

$$P_F = \frac{u_F}{3}$$

энтропия

$$\frac{S_B}{k_B} = 36 g_B \left(\frac{T}{K}\right)^3 \text{ см}^{-3} = 5.7 \cdot 10^{13} g_B \left(\frac{k_B T}{\text{eV}}\right)^3 \text{ см}^{-3}$$

$$S_F = \frac{7}{8} \frac{g_F}{g_B} S_B$$

Адиабатическое расширение идеальных газов

- Для релятивистских бозонных или фермионных газов в тепловом равновесии

$$P = \frac{u}{3} = \frac{E}{3V},$$

E – внутренняя энергия системы, V – её объём.

- Из первого закона термодинамики

$$dE = -PdV = 3d(PV) \Rightarrow P \propto V^{-3/4}$$

Таким образом

для релятивистских идеальных газов $\gamma = 4/3$

для **н**ерелятивистских идеальных газов $\gamma = 5/3$

$$PV^{4/3} = \text{const}, \quad VT^3 = \text{const}, \quad \frac{T^4}{P} = \text{const}.$$

Адиабатическое расширение идеальных газов

$$PV^{4/3} = \text{const}, \quad VT^3 = \text{const}, \quad \frac{T^4}{P} = \text{const}.$$

- Температурное масштабирование:

$$T \propto P^{1/4} \propto V^{-1/3} \propto a^{-1} \text{ (релятивистский случай)}$$

$$T \propto PV \propto V^{-5/3+1} \propto a^{-2} \text{ (нерелятивистский случай)}$$

- Если предположить, что в самой ранней Вселенной существует тепловое равновесие между фотонами и частицами (лептонами, барионами, тёмной материей), то с ростом размеров Вселенной их температуры будут значительно различаться как только какая-то компонента выходит из теплового равновесия.
- По этой причине говорить о температуре Вселенной не имеет смысла. Каждая компонента имеет свою температуру.

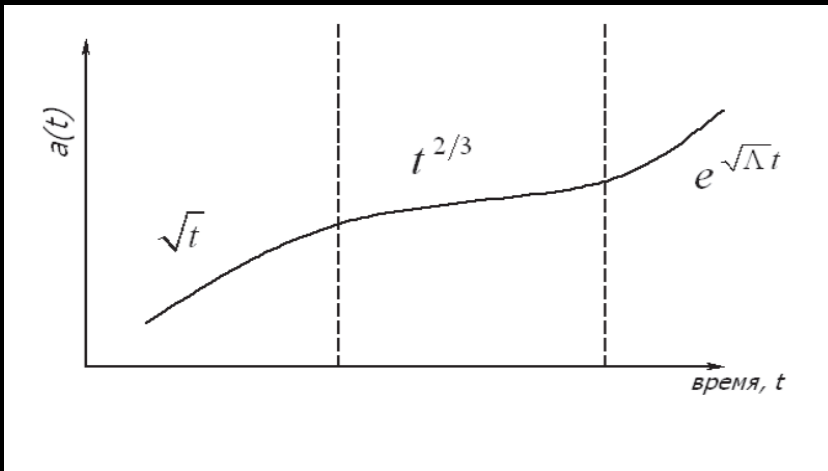
Freeze-Out (“вымораживание”) частиц

Расширение шкалы времени во время радиационно-доминированной эпохи

$$t_{exp} \approx (G\rho)^{-1/2} \propto a^2$$

Расширение шкалы времени во время пылевой стадии происходит медленнее

$$t_{exp} \propto a^{3/2}$$



Зависимость масштабного фактора от времени в модели Вселенной с излучением, веществом и космологической постоянной $\Lambda > 0$.

Freeze-Out (“вымораживание”) частиц

- Расширение шкалы времени Вселенной необходимо сравнивать с частотой столкновения частиц для определения условий нахождения их в термодинамическом равновесии.

- Частота столкновений на радиационно-доминированной эпохе

$$\Gamma \equiv n\langle\sigma v\rangle \propto n \propto T^3 \propto a^{-3}$$

$$v \sim c; \langle\sigma v\rangle \sim \text{const}$$

$$t_{\text{coll}} = \Gamma^{-1} \propto a^3$$

- Отношение $t_{\text{exp}}/t_{\text{col}} \propto a^{-1} > 1$ или $t_{\text{col}} < t_{\text{exp}}$ для радиационно-доминантной эпохи.

Даже если Вселенная расширяется, плотность частиц остаётся таковой, что столкновения происходят достаточно часто, чтобы поддерживать тепловое равновесие.

- Отношение $t_{\text{exp}}/t_{\text{col}}$ с ростом a уменьшается, время между последовательными столкновениями растёт и находится в равновесии с релятивистским газом всё сложнее.

Freeze-Out (“вымораживание”) частиц

- Частота столкновений для нерелятивистских частиц на пылевой стадии

$$PV = \text{const}; P = nkT \propto a^{-3}$$

$$n \propto a^{-3}/T \propto a^{-1}$$

$$\Gamma \equiv n\langle\sigma v\rangle \propto n \propto a^{-1}; \sigma \sim \frac{1}{v}$$

$$t_{coll} = \Gamma^{-1} \propto a$$

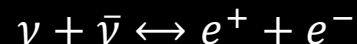
- Отношение $t_{exp}/t_{col} \propto a^{1/2}$ или $t_{col} > t_{exp}$.
- Как только частицы становятся нерелятивистскими, что особенно важно для массивных частиц, они быстро выпадают из термодинамического равновесия.

Freeze-Out (“вымораживание”) частиц

- С расширением Вселенной всё больше частиц «вымораживаются» - выходят из теплового равновесия. Всё сложнее описывать Вселенную в этом приближении.
- Тепловое равновесие нарушается, когда $\Gamma \ll H$.
- Релятивистские частицы сохраняют свою тепловую равновесную плотность даже несмотря на то, что выходят из состояния термодинамического равновесия (например, нейтрино).
- Нейтрино «вымораживаются» раньше фотонов и сегодня температура фона реликтового излучения ниже температуры реликтовых фотонов.

Фон нейтрино

- Слабое взаимодействие



Электроны и позитроны обеспечивают тепловое равновесие нейтрино с фотонами.

- «Вымораживание» нейтрино происходит, когда температура падает до

$$T_\nu \approx 10^{10.5} K \approx 2.7 MeV$$

С этого момента нейтрино распространяются независимо от фотонов.

- Электрон-позитронные пары аннигилируют при падении температуры ниже

$$T \approx 2m_e c^2 \approx 1 MeV \approx 10^{10} K$$

- Этот процесс нагревает фотонный газ, но уже не нейтрино

- Температура фотонов оказывается на $\approx 40\%$ выше температуры нейтрино (статистический вес + остывание по закону для релятивистского газа):

$$T_\gamma = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_\nu$$

Переход от радиационной стадии к пылевой

Время перехода от радиационно-доминантной стадии к пылевой – чрезвычайно важный параметр в теории эволюции неоднородностей.

Оценка этого момента зависит от количества вещества и излучения

$$z_{eq} + 1 = \frac{a_0}{a_{eq}} \sim \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} \sim \frac{0.25}{5.1 * 10^{-5}} \sim 10^4$$

$$T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \sim 10^4 K \sim 1 \text{ эВ}$$

При такой температуре релятивистскими являются все три типа нейтрино; их распределение по энергии остаётся тепловым.

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma$$

Пусть температура Вселенной отождествляется с температурой фотонов

$$T_\gamma \equiv T$$

Переход от радиационной стадии к пылевой

Тогда вклад нейтрино в общую плотность Вселенной даётся законом Стефана-Больцмана

$$\rho_\nu = 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi^2}{30} T_\nu^4$$

Плотность энергии релятивистского вещества в эпоху доминирования излучения

$$\rho_{rad} = \rho_\gamma + \rho_\nu = \left[2 + \frac{21}{4} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \right] \frac{\pi^2}{30} T^4$$

$$\rho_{rad} = 1.68 \rho_\gamma = 1.68 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \Omega_\gamma \rho_c$$

Плотность энергии нерелятивистского вещества

$$\rho_M = \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \Omega_M \rho_c$$

Переход к радиационно-доминантной стадии происходит при

$$1 + z_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} = 0.6 \frac{\Omega_M}{\Omega_\gamma} = 2.4 \cdot 10^4 \Omega_M h^2$$

Переход от радиационной стадии к пылевой

Для $\Omega_M = 0.24$ и $h = 0.7$ получается

$$1 + z_{eq} = 3.0 \cdot 10^3$$

$$T_{eq} = (1 + z_{eq})T_0 = 5.6\Omega_M h^2 \text{ эВ}$$

$$T_{eq} = 0.7 \text{ эВ}$$

Для этих же параметров время перехода (происходит не резким скачком) от одной фазы к другой

$$t_{eq} = \frac{1}{2H_{eq}} = \frac{M_{pl}^*}{2T_{eq}^2} = 80 \text{ тыс. лет}$$

Холодная, горячая и тёплая тёмная материя

Пусть частицы тёмной материи в начальный момент времени находились в термодинамическом равновесии с остальным веществом.

В какой-то момент времени они выходят из него, пусть это происходит при температуре T_f

Если $T_f \ll M_X$, то частицы отщепляются нерелятивистскими – холодная тёмная материя.

Если $T_f \gg M_X$, то рассматривают два случая:

$M_X \leq 1$ эВ – горячая тёмная материя

$M_X > 1$ эВ – тёплая тёмная материя

Горячая тёмная материя является релятивистской при переходе от радиационно-доминированной к пылевой стадии (переход происходит при $T_{eq} \sim 1$ эВ), а тёплая уже нет.

Холодная, горячая и тёплая тёмная материя

Рост возмущений плотности на радиационно-доминированной и пылевой стадиях происходит существенно по-разному. Излучение не даёт возможности материи формировать сгустки.

Рост возмущений на пылевой стадии существенно зависит от того, релятивистской или нерелятивистской является тёмная материя.

Пусть во Вселенной изначально имеются неоднородности плотности тёмной материи, был период, когда частицы ТМ были релятивистскими и распространялись свободно (при т-ре $T_f > T > M_X$).

В это время они двигались достаточно быстро, что бы покинуть области повышенной плотности и заполнить области пониженной плотности (в пределах текущего космологического горизонта).

В результате такого перемешивания неоднородности плотности с размерами меньше текущего горизонта размывались. Т.о. для горячей и тёплой ТМ характерны малые амплитуды возмущений плотности на относительно малых масштабах.

Холодная, горячая и тёплая тёмная материя

Свободное перемешивание прекращается, если частицы становятся нерелятивистскими, т.е. $T \sim M_X$.

Размер горизонта в это время $(1+z) \approx T/T_0$ определяет максимальный современный размер областей, в которых возмущения плотности подавлены.

Для тёплой тёмной материи $T \sim M_X$ происходит на радиационной стадии, а для горячей – уже на пылевой.

Для тёплой тёмной материи размер горизонта в этот момент

$$l_H \sim \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X^2}$$

$$M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}} = 4 \cdot 10^{18} \text{ ГэВ}$$

Соответствующий современный размер

$$l_{X,0} = l_H \frac{T}{T_0} \sim \frac{M_{Pl}^*}{T_0 M_X}$$

Холодная, горячая и тёплая тёмная материя

Т.о. в современной Вселенной в моделях с тёплой тёмной материей области размером

$$l_0 < l_{x,0}$$

подавлены в сравнении с моделями с холодной тёмной материей.

Для $M_X \sim 1 \text{ кэВ}$

$$l_{x,0} \sim 3 \cdot 10^{23} \text{ см} = 0.1 \text{ Мпк}$$

Для $M_X \sim 1 \text{ эВ}$

$$l_{x,0} \sim 100 \text{ Мпк}$$

Возмущения на всех масштабах менее 100 Мпк подавлены и в моделях с горячей тёмной материей.

Холодная, горячая и тёплая тёмная материя

Частицы горячей тёмной материи (например, нейтрино СМ) могут составлять лишь небольшую часть тёмной материи, поскольку для них возмущения плотности в масштабах менее 100 Мпк подавлены.

В таких моделях сначала формируются сверхскопления, затем они распадаются на скопления. Галактики формируются в последнюю очередь и этот процесс должен был начаться недавно.

Для тёплой тёмной материи наблюдается верная иерархия образования структур материи, но пространственные возмущения размером ~ 0.1 Мпк в конечном итоге приводят к формированию карликовых галактик. Это позволяет установить ограничения на массу тёплой тёмной материи

$$M_x \gtrsim 1 \text{ кэВ}$$

Наиболее приемлемым вариантом являются модели с холодной тёмной материей.

Отсутствие термодинамического равновесия частиц ТМ и первичной плазмы

Ограничения на ТМ в этом случае гораздо слабее и вытекают из условия заключения необходимой массы в галактики.

Для частицы ТМ – бозона – длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi}{M_x v_x} < 5-10 \text{ кпк}$$

Если скорость частицы $\sim 10^{-3}$, то

$$M_x \gtrsim 3 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}$$

Отсутствие термодинамического равновесия частиц ТМ и первичной плазмы

Для частицы ТМ – фермиона – ограничение значительно сильнее из-за принципа Паули.

Пусть распределение частиц ТМ по скоростям имеет вид распределения Максвелла.

$$f(p, x) = \frac{\rho_X(x)}{M_X^4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi}M_X v_X)^3} \cdot \exp\left\{-\frac{p^2}{2M_X^2 v_X^2}\right\}$$

$$f^{\max}(p, x) = \frac{\rho_X(x)}{M_X^4} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_X^3} \quad \text{при } p=0$$

Это значение не может превысить максимально допустимого принципом Паули.

$$f_X = \frac{g_X}{(2\pi)^3}$$

Для $g_X=2$, $v_X \sim 10^{-3}$, $\rho_X(x) \sim 0.5$ ГэВ/см³ $M_X \gtrsim 25$ эВ

В центре карликовых галактик $\rho_X(x) \sim 15$ ГэВ/см³ $M_X \gtrsim 750$ эВ

Отсутствие термодинамического равновесия частиц ТМ и первичной плазмы

Формальное ограничение сверху на массу частиц тёмной материи вытекает из стабильности звёздных скоплений в Галактике, которые разрушались бы наводимым гравитационным полем пролетающих мимо более тяжёлых частиц тёмной материи.

$$M_x \lesssim 10^3 M_\odot \sim 10^{61} \text{ ГэВ}$$

Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Пусть существуют некоторые тяжёлые стабильные частицы, находившиеся в термодинамическом равновесии с первичной плазмой при достаточно высоких температурах.

Пусть термодинамическое равновесие сохраняется и при температурах меньше их массы (холодная тёмная материя).

Предположим, что частицы и античастицы тождественны и могут аннигилировать и рождаться парами, т.е. можно считать их химический потенциал равным 0.

$$n_X - n_{\bar{X}} = 0$$

Это предположение точно выполняется в модели суперсимметричной тёмной материи.

При температурах $T < M_X$ в термодинамическом равновесии:

$$n_X = n_{\bar{X}} = g_X \left(\frac{M_X T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{M_X}{T}}$$

Из-за стабильности частиц X и \bar{X} уменьшение их количества в сопутствующем объёме происходит за счёт процесса аннигиляции.



Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Пока скорость аннигиляции выше скорости расширения Вселенной, равновесная концентрация даётся указанной выше формулой.

В какой-то момент плотность X -частиц падает так сильно, что аннигиляция прекращается – это и называется процессом закалки. Количество частиц перестаёт меняться.

Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Найдём остаточную плотность X – частиц.

Определим температуру, при которой перестаёт идти реакция аннигиляции. Для этого рассмотрим одну \bar{X} - частицу. Среднее время пробега τ этой частицы до аннигиляции выражается формулой:

$$\tau = \frac{1}{n_x} \frac{1}{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle}$$

где σ_{ann} - сечение аннигиляции, v – относительная скорость частиц.

Момент прекращения («вымораживания») реакции аннигиляции можно найти, приравняв время пробега τ к времени жизни Вселенной $t \sim H^{-1}(T_f)$

$$\frac{1}{n_x} \frac{1}{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle} = H^{-1}(T_f)$$

В случае нерелятивистских частиц зависимость σ_{ann} от v определяется законом Бете:

$$\sigma_{\text{ann}} = \frac{\sigma_0}{v}$$

σ_0 - не зависящая от относительной скорости частиц постоянная, определяемая взаимодействиями, ответственными за аннигиляцию.

Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Таким образом, считая, что закалка происходит на радиационно-доминирующей стадии, получаем

$$\frac{1}{g_X \sigma_0} \left(\frac{2\pi}{M_X T_f} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{M_X}{T_f}} = H^{-1} \langle T_f \rangle \equiv \frac{M_{Pl}^*}{T_f^2}$$

Поскольку в правой части большой множитель, а $M_X < M_{Pl}^*$ или даже $M_X \ll M_{Pl}^*$

$$T_f \ll M_X$$

Т.е. это случай холодной тёмной материи.

Выполним преобразование

$$x = \ln(Ax^\alpha)$$

$$x = \frac{M_X}{T_f}, \quad A = \frac{g_X}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sigma_0 M_{Pl}^* M_X, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Поскольку $M_X \ll M_{Pl}^*$, а сечение можно оценить как $\sigma_0 = M_X^{-2}$, то выполнено условие логарифмического приближения $\ln A \gg 1$.

Тогда

$$x = \ln A$$

$$T_f = M_X \left[\ln \left(\frac{g_X M_X M_{Pl}^* \sigma_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]^{-1}$$

Температура закалки слабо (логарифмически) зависит от сечения аннигиляции и отличается от массы частицы малым множителем

$$\left[\ln \left(\frac{g_X M_X M_{Pl}^* \sigma_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right) \right]^{-1}$$

Это согласуется с предположением, что частицы X закаляются в нерелятивистском состоянии.

Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Плотность частиц X в момент закалки

$$\frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle} = H^{-1}(T_f) = \frac{M_{\text{Pl}}^*}{T_f^2}$$

$$\sigma_{\text{ann}} = \frac{\sigma_0}{v}$$

$$n_X(t_f) = \frac{T_f^2}{M_{\text{Pl}}^* \sigma_0}$$

После закалки плотность частиц X меняется только из-за расширения Вселенной

$$n_X(t_0) = \left(\frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right)^3 n_X(t_f)$$

Закалка тяжёлых реликтовых частиц

На основе термодинамического уравнения можно показать, что при равновесном расширении энтропия сохраняется по закону $sa^3 = const$.

Тогда

$$n_X(t_0) = \left(\frac{s_0}{s(t_f)} \right) n_X(t_f)$$

При этом современная плотность энтропии равна

$$s_0 = 2 \cdot \frac{4\pi^2}{90} \left(T_\gamma^3 + 3 \cdot \frac{7}{8} T_\nu^3 \right) = 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$$

Тогда

$$s(t_f) = g_*(t_f) \cdot \frac{4\pi^2}{90} T_f^3$$
$$n_X(t_0) = \frac{s_0 T_f^2}{s(t_f) M_{Pl}^* \sigma_0} = 3.8 \cdot \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}}$$

Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Современная относительная плотность частиц X

$$\Omega_X = 2 \cdot \frac{M_X n_X(t_0)}{\rho_c} = \frac{7.6 s_0}{\rho_c \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \cdot \ln \left(\frac{g_X M_{Pl}^* M_X \sigma_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Подставляя значения констант

$$\Omega_X = 3 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\Gamma \text{ЭВ}^{-2}}{\sigma_0} \right) \frac{1}{\sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left(\frac{g_X M_{Pl}^* M_X \sigma_0}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{1}{2h^2}$$

Применения формулы будут рассмотрены в конкретных моделях частиц тёмной материи.