Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Происхождение Вселенной

элективный курс

Лекция 4

Москва

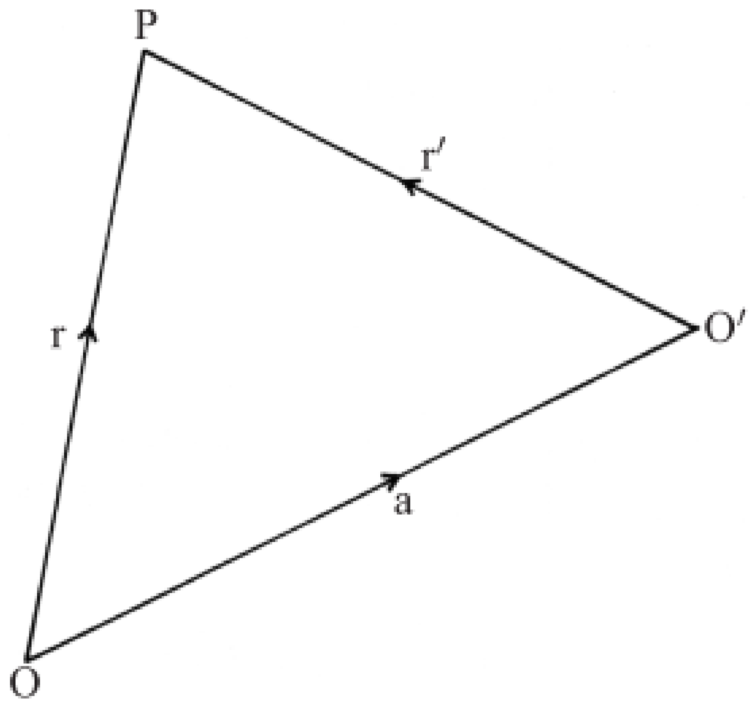
Космология

1) Расширение Вселенной в моделях Большого взрыва
   - Фундаментальные наблюдатели и космологический принцип
   - Космология Ньютона
   - Теория относительности
   - Космология в рамках ОТО
   - Кривизна пространства
   - Классификация космологических моделей
2) Начальные этапы Большого взрыва
   - Тепловая эволюция
   - Первичный нуклеосинтез
   - Реликтовое излучение
3) От фазы огненного шара к современность
   - Рост возмущений и нелинейная эволюция
   - Крупномасштабная структура Вселенной
   - Анизотропия распределения вещества
4) Наблюдательная космология

Космологический принцип

- Фундаментальные наблюдатели находятся в покое относительно «субстрата» Вселенной.
- Картина развивающейся во времени Вселенной называется космологической моделью.
- Космологический принцип. Вселенная
  - однородна
  - изотропна
- Следствием космологического принципа является существование универсального космического времени, т.к. все наблюдатели видят одну последовательность событий и могут по ним синхронизовать часы.

Космология Ньютона



По закону сложения радиус-векторов

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$$

Тогда

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})$$

По закону сложения скоростей

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})$$

Согласно принципу однородности

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})$$

Тогда

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})$$

Космология Ньютона

Согласно принципу однородности также

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}), \qquad p(\boldsymbol{r}') = p(\boldsymbol{r})$$

Тогда

$$\rho(\boldsymbol{r} - a) = \rho(\boldsymbol{r}), \qquad p(\boldsymbol{r} - a) = p(\boldsymbol{r})$$

Поскольку все точки выбраны произвольно, то r и а – тоже произвольные величины.
Т.е. характеристики Вселенной не зависят от точки наблюдения.

Космология Ньютона

Общее решение системы 3-х уравнений

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})$$

даётся выражением (9-ю уравнениями)

$$v_i(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}(t)x_k \qquad \text{при} \quad i=1,\,2,\,3$$

Первое решение

$$v_1(x_1,x_2,x_3,t)=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3$$

Однако условие изотропии требует, что бы

$$a_{ik}=0, \qquad i\neq k$$

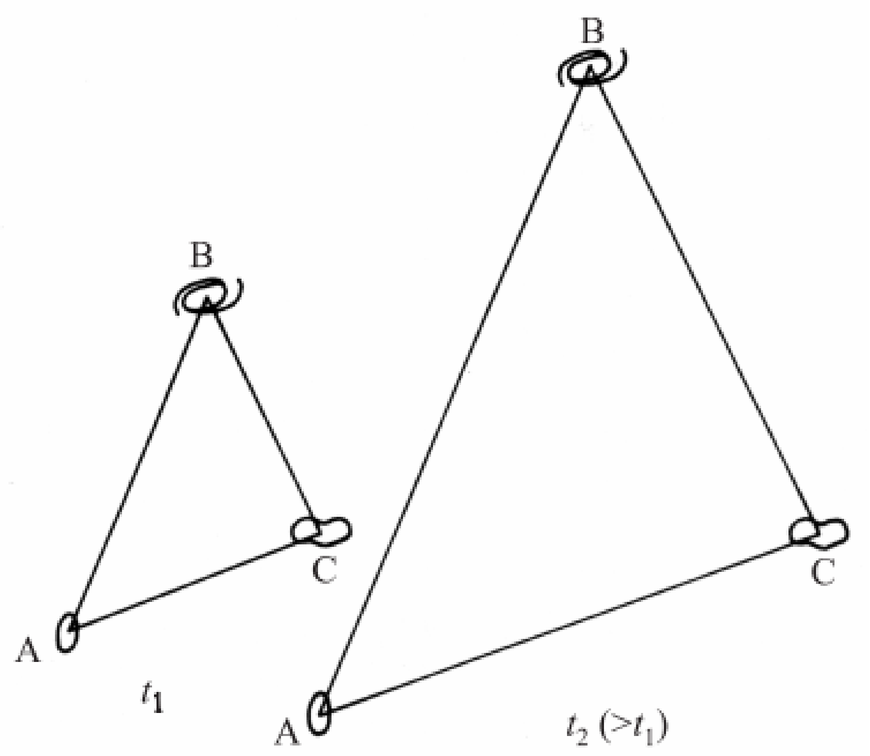
Диагональные элементы решения $a_{11}=a_{22}=a_{33}=H(t)$

Тогда из естественных рассуждений получает закон Хаббла

$$v_1=H(t)x_1, \qquad v_2H(t)x_2, \qquad v_3=H(t)x_3$$

Однородна изотропная Вселенная может быть стационарной или сживаться/расширяться по закону $\boldsymbol{v}=H(t)\boldsymbol{r}$

Космология Ньютона



Поскольку

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$$

Постоянную Хаббла можно представлять как относительную скорость расширения или сжатия Вселенной

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

Тогда закон Хаббла имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{1}{R(t)}\frac{dR}{dt}\boldsymbol{r}$$

Его решение

$$\boldsymbol{r} = R(t) \times \text{постоянный вектор} = \frac{R(t)}{R_0}\boldsymbol{r}_0$$

$$R_0 = R(t_0)$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 \text{ в момент } t = t_0$$

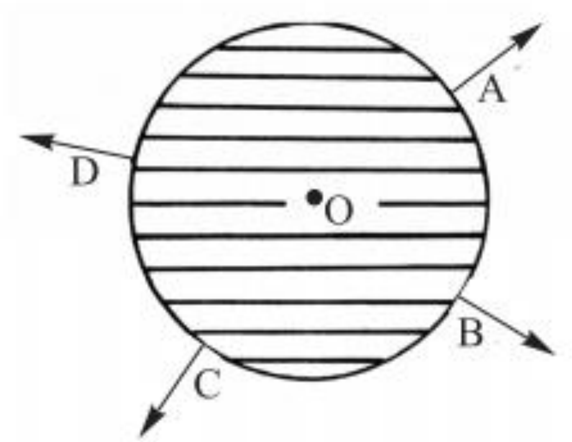
Космология Ньютона

Т.к. объем пропорционален 3-ей степени масштабного фактора, то плотность вещества (только нерелятивистского в данном приближении)

$$\rho(t) \propto R(t)^{-3}$$

или

$$\rho(t) = \rho_0 R_0^3 / R^3(t) \qquad \rho = \rho(t_0)$$



Сила, действующая на частицы на поверхности некоторого шара

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{4\pi G m \rho}{3}\mathbf{r}$$

Считаем, что все внешние силы скомпенсированы.
Для бесконечной Вселенной это утверждение доказывается в рамках ОТО (теорема Биркгофа)

Космология Ньютона

Выполняем подстановку в уравнение радиус-вектора

$$\boldsymbol{r} = \frac{R(t)}{R_0}\boldsymbol{r}_0$$

Тогда

$$\ddot{R}\frac{\boldsymbol{r}_0}{R_0} = -\frac{4\pi G\rho R\boldsymbol{r}_0}{3R_0}$$

$$\ddot{R} = -4\pi G\rho R/3$$

Проведём интегрирование с учётом распределения вещества $\rho(t) = \rho_0 R_0^3/R^3(t)$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2$$

k - некоторая постоянная.

Это уравнение очень близко к уравнению общей теории относительности.

Теории относительности

Специальная теория относительности

Учитывает релятивистские эффекты.

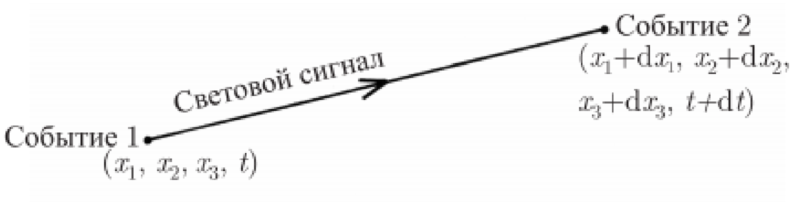
$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Вводится понятие события в 4-х мерном пространстве

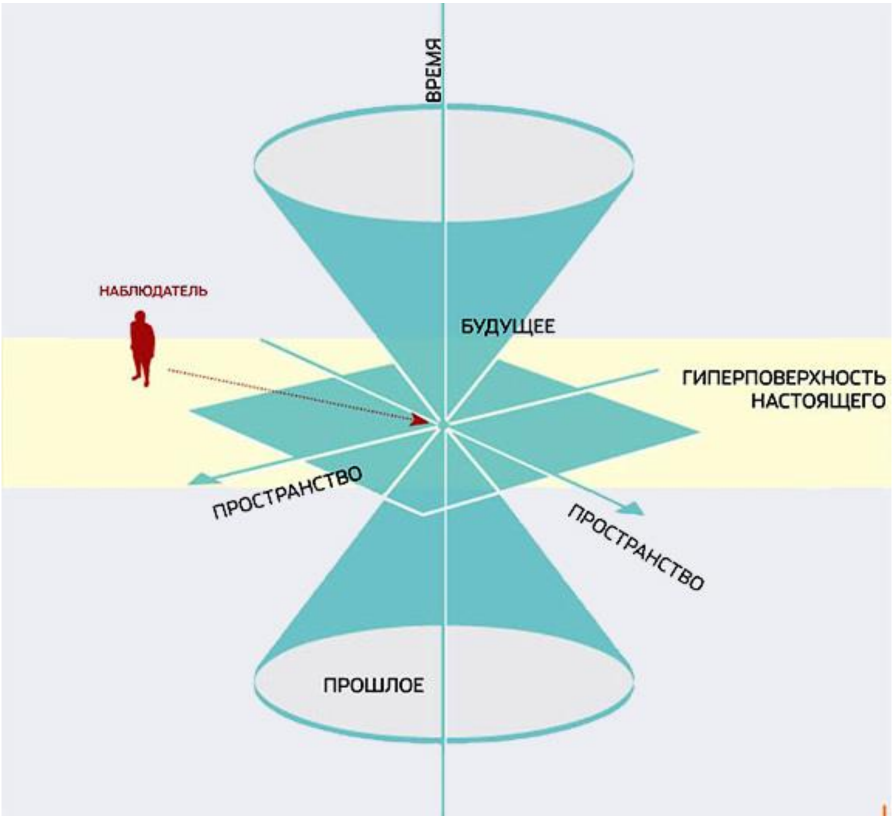
$$(x_1, x_2, x_3, t)$$

Расстояние – интервал – между двумя событиями

$$(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t + dt)$$



$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = 0$$



Теории относительности

Специальная теория относительности основывается на принципе эквивалентности: для локальной системы отсчёта, пребывающей в свободном падении, справедлива специальная теория относительности.

Т.е. силы гравитации локально всегда можно заменить силами инерции, перейдя в правильную систему отсчёта.

Не локально приходится учитывать искривление пространства-времени. Для этого используется т.н. метрический тензор

$$ds^2 = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} g_{\lambda\mu} dx_\lambda dx_\mu$$

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2 + 2g_{23}dx_2dx_3 + \\ & + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4 + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + \\ & + 2g_{14}dx_1dx_4, \qquad x_4 = t, \end{aligned}$$

Для евклидова пространства

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{\lambda\mu} = 0$ и $\lambda \neq \mu$

Теории относительности

К эффектам теории относительности можно отнести:

- движение света по кратчайшим расстояниям – геодезическим;
- эффекты гравитационного линзирования;
- появление объектов со свойствами чёрных дыр;
- гравитационное красное смещение;
- прецессии орбит планет;
- другие.

Одним из недостатков теории является возникновение бесконечных величин при $r \to 0$

Космология в рамках ОТО

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера является самой общей, удовлетворяющей космологическому принципу

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2}\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Для нахождения R(t) необходимо подставить метрику в полевые уравнения, связывающие искривления пространства с распределением (плотностью и давлением) вещества и излучения.

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

Уравнения Фридмана

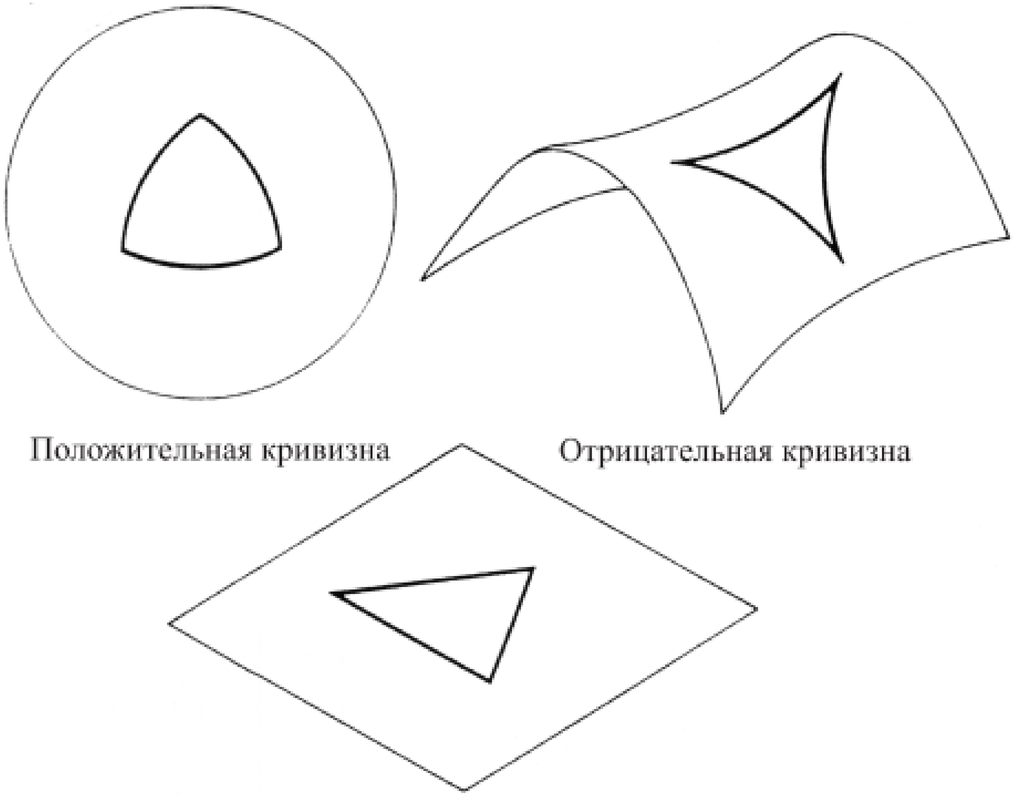
$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho R^2}{3} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

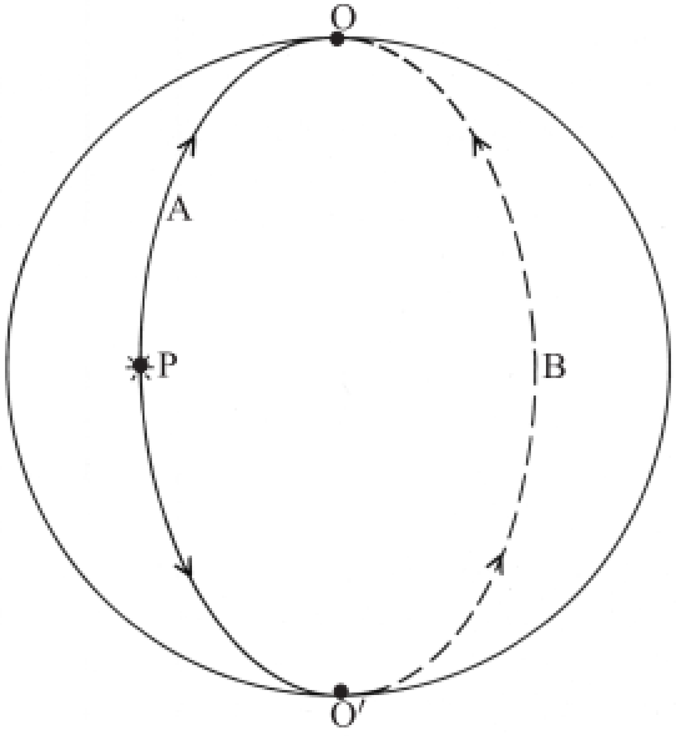
Λ – космологическая константа

Дифференцируя второе уравнения и подставляя в первое, получается уравнение непрерывности

$$\frac{d(\rho R^3)}{dt} + (p/c^2)\frac{dR^3}{dt} = 0$$

Кривизна пространства





Классификация космологических моделей. $\Lambda = 0$

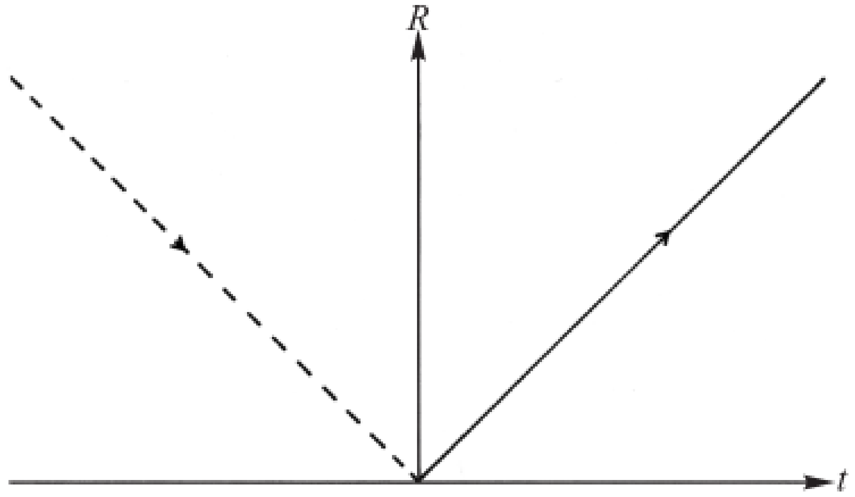
Модель Милна, $\rho = 0, k = -1$

Можно воспользоваться Ньютоновской космологией.

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2$$

Решение

$$R(t) = \pm ct$$



Классификация космологических моделей. $\Lambda = 0$

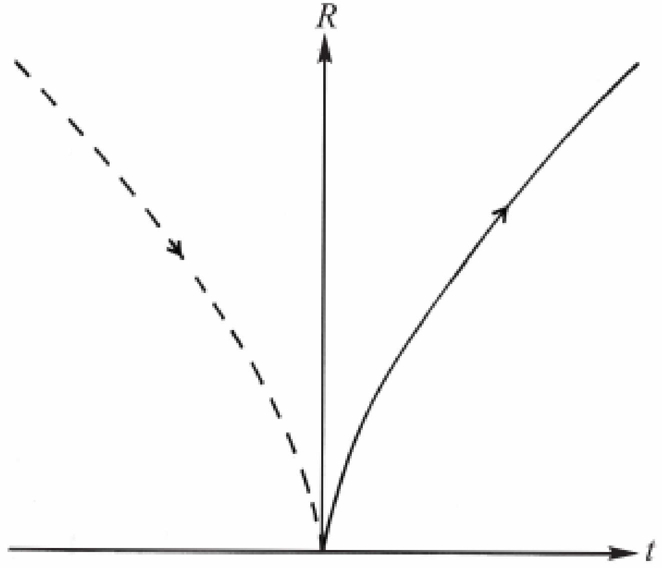
Модель Эйнштейна–де Ситтера, $k = 0$

Можно воспользоваться Ньютоновской космологией.

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2$$

Решение

$$R(t) = \pm R_0 (t/t_0)^{2/3}$$

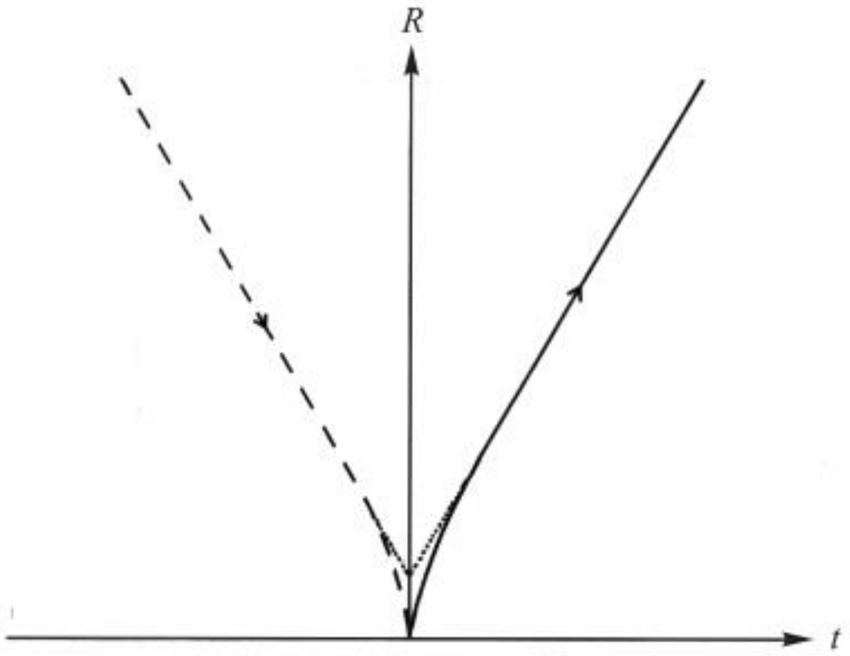


Классификация космологических моделей. $\Lambda = 0$

Модель Эйнштейна – де Ситтера, $\rho > 0, k = -1$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2$$

$\dot{R}^2 > 0$ для всех R, поэтому расстояние всегда изменяется монотонно



При устремлении времени в бесконечность скорость расширения должна стремиться к скорости света, происходит переход к Вселенной Милна.

Классификация космологических моделей. $\Lambda = 0$

Модель Эйнштейна – де Ситтера, $\rho > 0$, $k = +1$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2$$

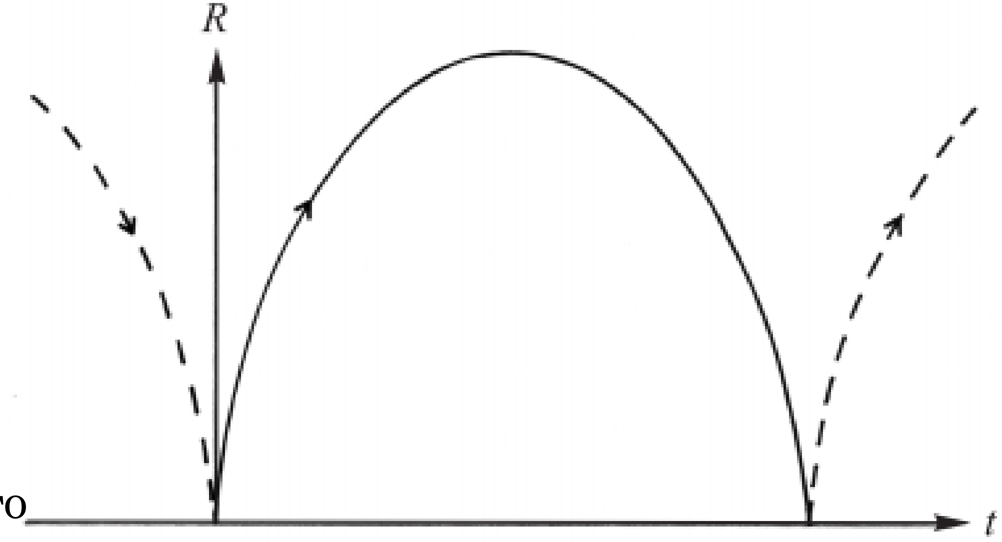
Существует некоторое критическое значение

$$R_c = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3c^2}$$

Поскольку согласно 1-ому уравнению Фридмана ускорение всегда отрицательно

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3$$

расширение рано или поздно сменится сжатием (из-за взаимного гравитационного притяжения галактик).



Получается модель «пульсирующей» Вселенной