Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Происхождение Вселенной

элективный курс

Лекция 5

Москва

Космология

1) Расширение Вселенной в моделях Большого взрыва
   - Фундаментальные наблюдатели и космологический принцип
   - Космология Ньютона
   - Теория относительности
   - Космология в рамках ОТО
   - Кривизна пространства
   - Классификация космологических моделей
2) Начальные этапы Большого взрыва
   - Тепловая эволюция
   - Первичный нуклеосинтез
   - Реликтовое излучение
3) От фазы огненного шара к современность
   - Рост возмущений и нелинейная эволюция
   - Крупномасштабная структура Вселенной
   - Анизотропия распределения вещества
4) Наблюдательная космология

Классификация космологических моделей. Λ ~= 0

Уравнения Фридмана, полученные в общей теории относительности.

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

Вблизи R=0 космологический член не оказывает влияния. Он имеет значение на больших расстояниях.

Классификация космологических моделей. Λ ~= 0

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

$\Lambda < 0$

Что бы скорость была вещественным числом, Вселенная должна быть конечна.

Существует критическое расстояние, при котором скорость расширения становится равной нулю: *G(R)=0*.
Поскольку ускорение всегда отрицательно, то Вселенная в некоторый момент времени перейдёт к сжатию.

Решением уравнения Фридмана оказывается модель пульсирующей Вселенной.

Классификация космологических моделей. $\Lambda \sim= 0$

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

$\Lambda > 0$

Если $k \leq 0$, то скорость всегда положительна, Вселенная монотонно расширяется.

Однако $\ddot{R}^2 \sim \Lambda R^2/3$

И решение $R \propto \exp[(\Lambda/3)^{1/2}t]$

Классификация космологических моделей. Λ ~= 0

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

Λ > 0

При k = 1 существует критическое значение Λ, при котором и скорость, и ускорение равны 0.

Из 1-го уравнения $\Lambda = 4\pi G\rho$

Из 2-го уравнения $\Lambda = kc^2/R^2$

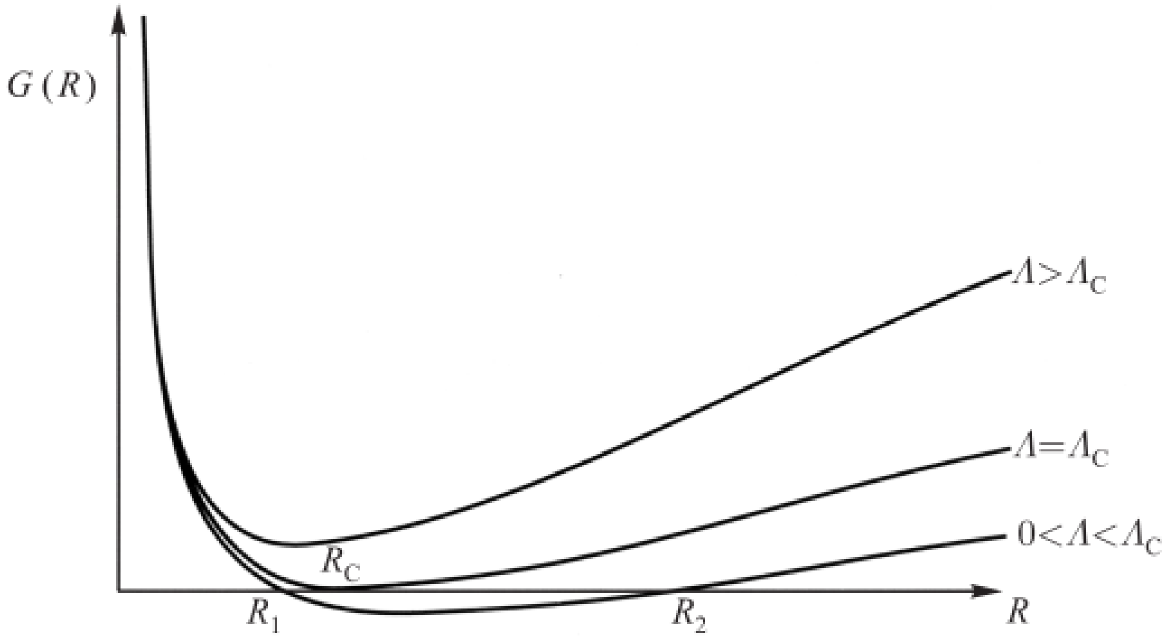
Таким образом, можно говорить о статической модели Вселенной при

$$\Lambda = \Lambda_c = 4\pi G\rho_c = kc^2/R_c^2$$

Классификация космологических моделей. Λ ~= 0

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$



$\Lambda > \Lambda_c$

G(R) > 0 при любых *R*, а значит снова модель бесконечно расширяющейся Вселенной

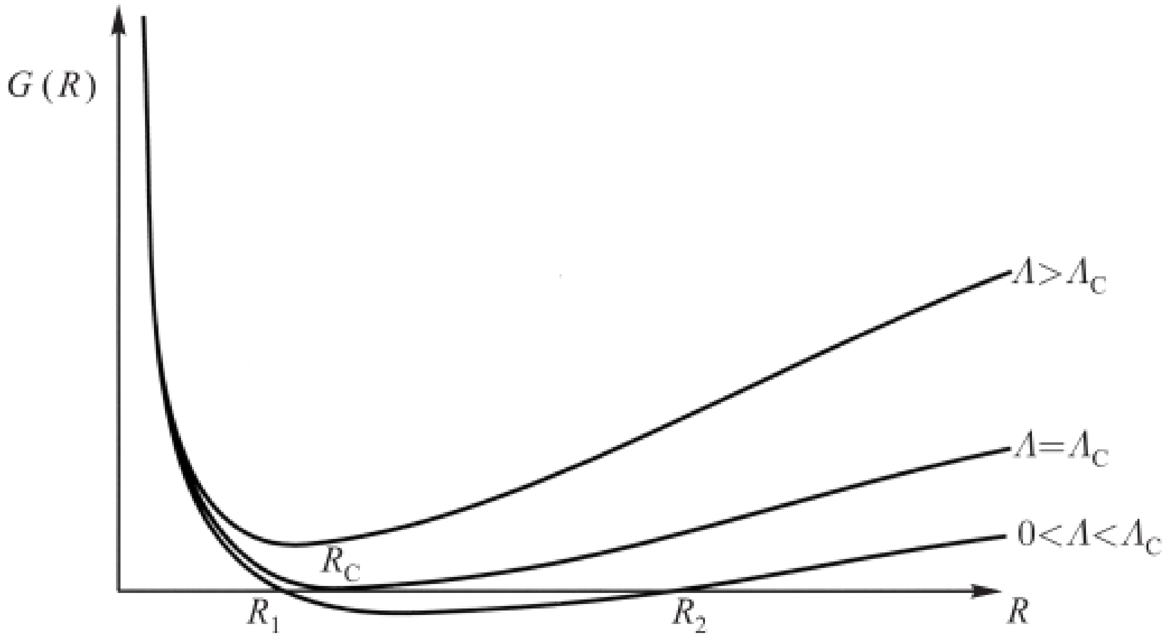
Классификация космологических моделей. $\Lambda \sim= 0$

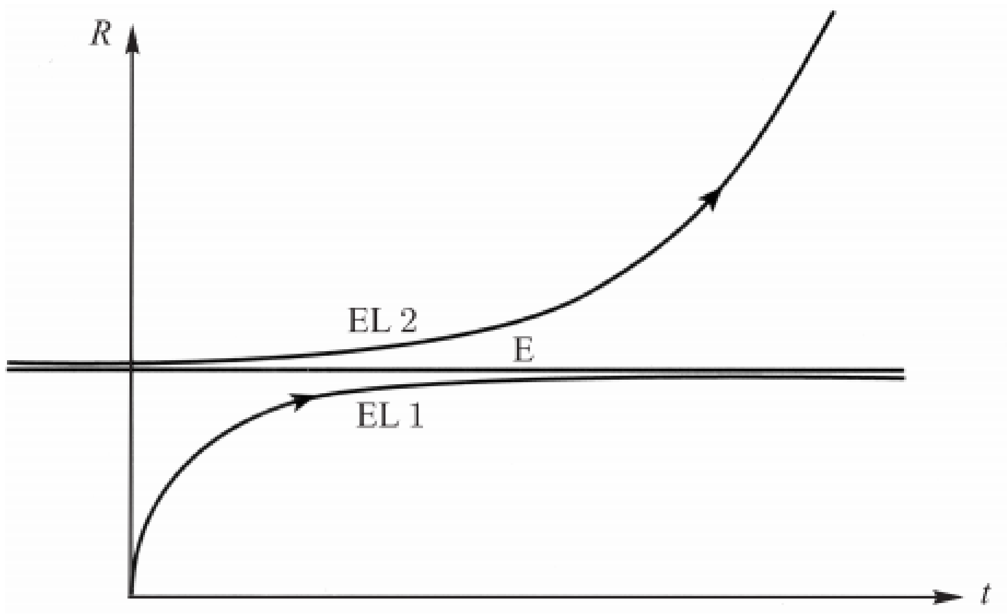
$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

$\Lambda = \Lambda_c$

Существуют две асимптотики к статической модели Эйнштейна – модели Эддингтона-Леметра (EL1 и EL2).





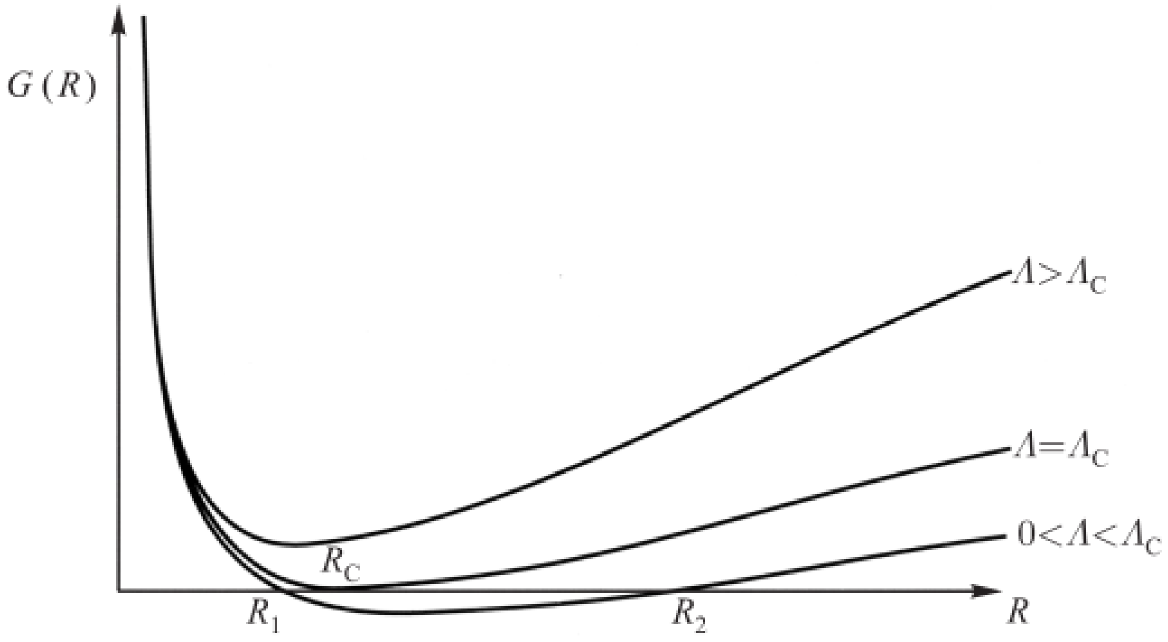
Классификация космологических моделей. Λ ~= 0

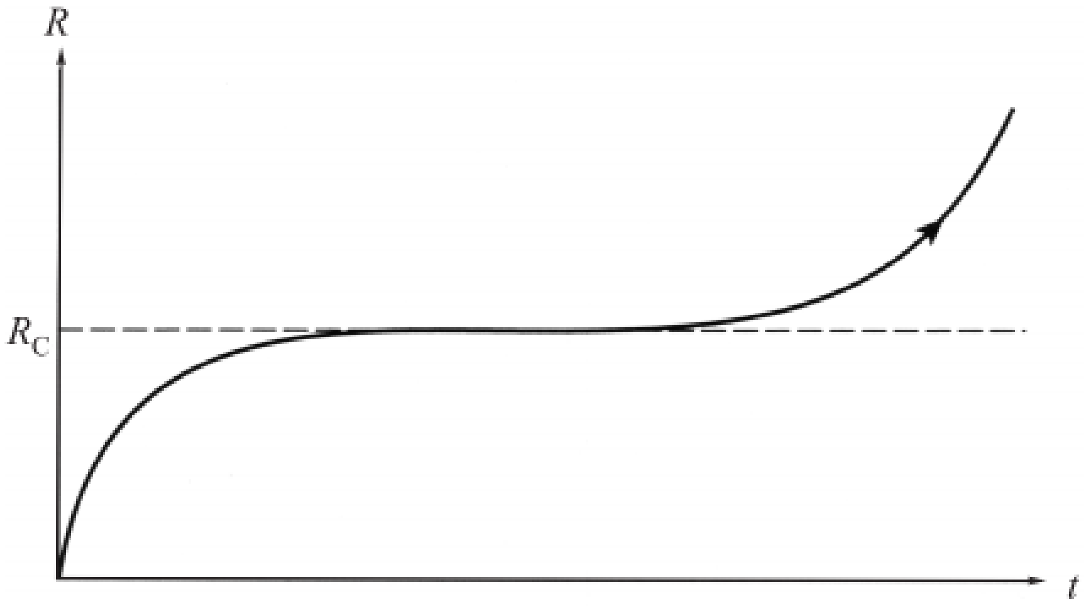
$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

$\Lambda = \Lambda_c(1+\varepsilon)$

Модель Леметра. Вселенная долгое время остаётся примерно постоянного размера, удерживаясь силами гравитации, но со временем космологическое отталкивание начинает доминировать.





Классификация космологических моделей. Λ ~= 0

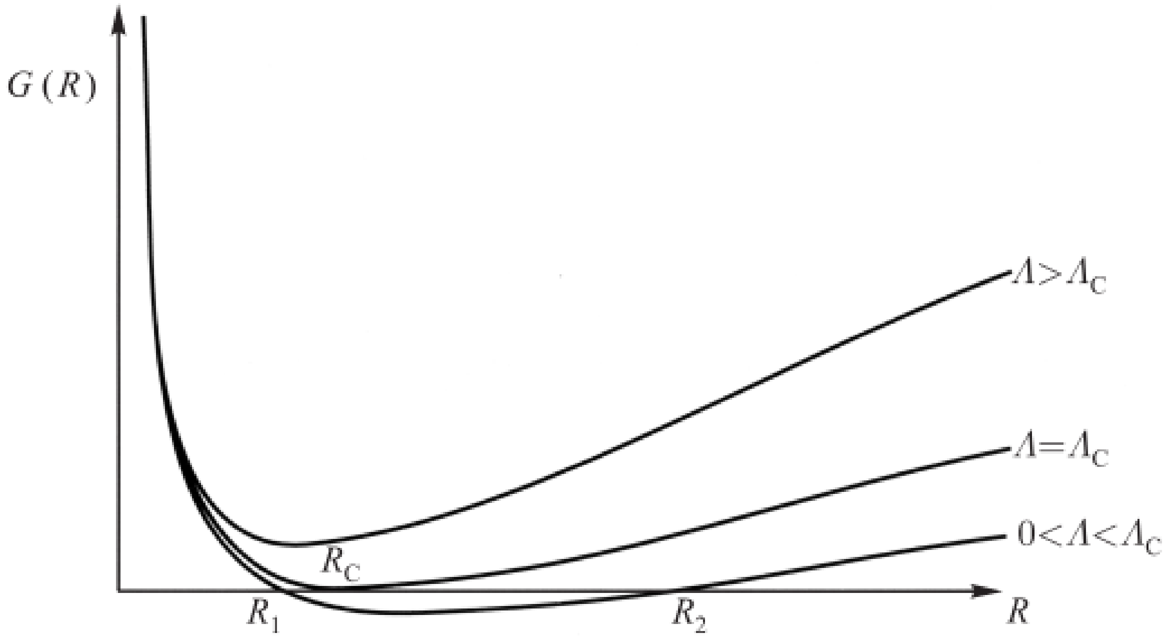
$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

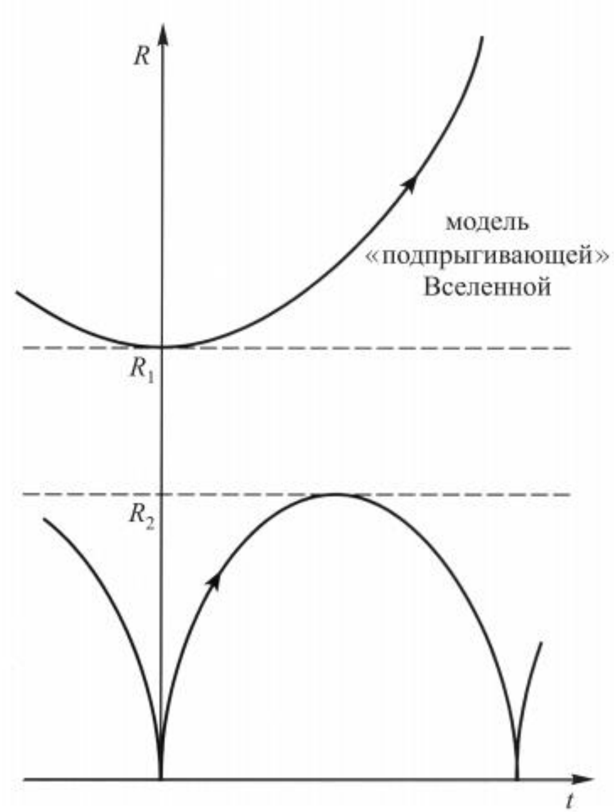
$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

$\Lambda < \Lambda_c$

Для $R \le R_1$ решением служит пульсирующая модель Вселенной.

Для $R \ge R_2$ Вселенная «подпрыгивает» под действием космологического отталкивания.





Космологические параметры

Постоянная Хаббла

$$H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$$

Параметр замедления

$$q(t) = -R(t)\ddot{R}(t)/\dot{R}^2(t)$$

Параметр плотности

$$\Omega(t) = 8\pi G\rho(t)/3H^2(t)$$

Безразмерная космологическая постоянная

$$\lambda = \Lambda/3H^2$$

Космологические параметры

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

$$q(t) = -R(t)\ddot{R}(t)/\dot{R}^2(t)$$
$$\Omega(t) = 8\pi G\rho(t)/3H^2(t)$$
$$\lambda = \Lambda/3H^2$$

Если $\Lambda = 0$, то

$$\Omega(t) = 2q(t)$$

$$kc^2 = R^2H^2(\Omega - 1)$$

Кривизна пространства зависит от Ω

Если Λ ~= 0, то

$$\lambda = (\Omega/2 - q)$$

$$\Omega + \lambda - 1 = kc^2/R^2H^2$$

Для $\Lambda = \Lambda_c$

$$(3\Omega/2 - q - 1)^3 = 27(\Omega/2)^2(\Omega/2 - q)$$

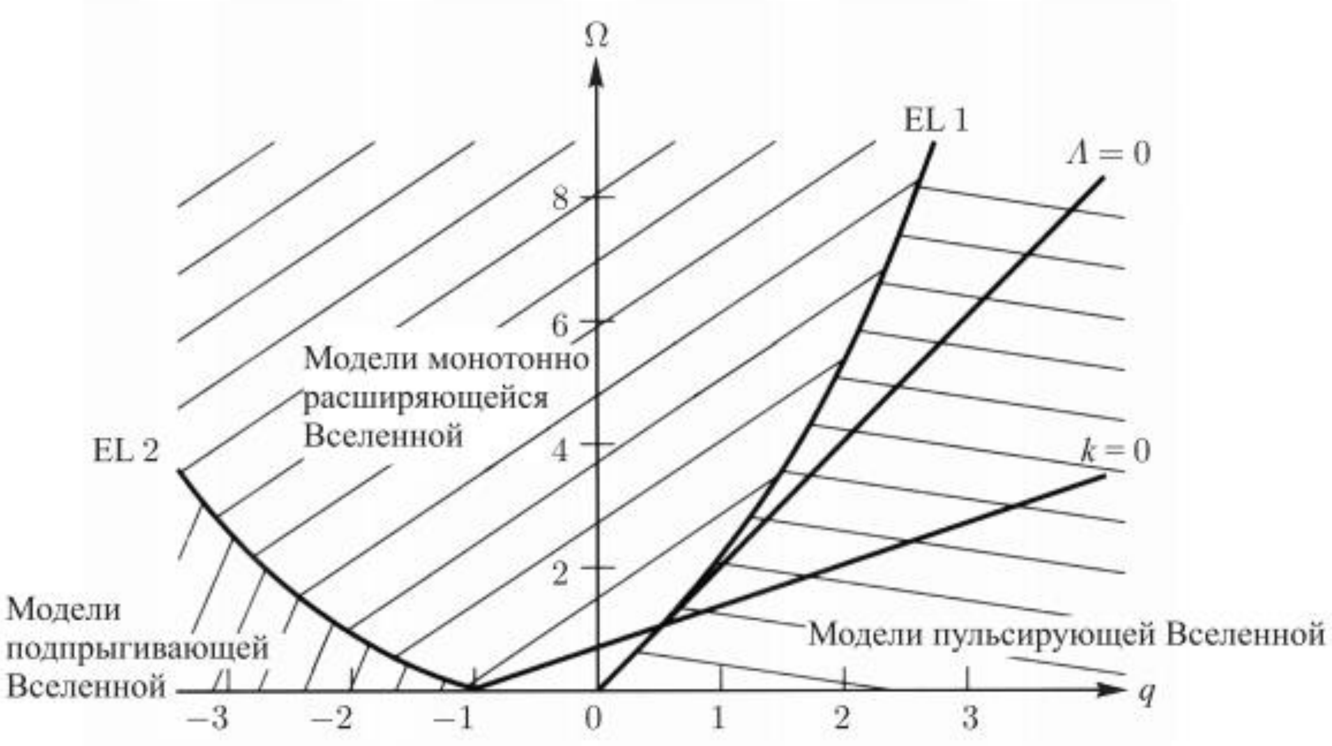
Космологические параметры

$$\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R/3 + \Lambda R/3$$

$$\dot{R}^2 = G(R) = \frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R} - kc^2 + \Lambda R^2/3$$

$$q(t) = -R(t)\ddot{R}(t)/\dot{R}^2(t)$$
$$\Omega(t) = 8\pi G\rho(t)/3H^2(t)$$
$$\lambda = \Lambda/3H^2$$

Зоны, занимаемые различными моделями на диаграмме q-Ω



Космологические параметры

Параметры, определённые в различных наблюдениях

$$H_0 = 72 \pm 8 \text{км}\,\text{с}^{-1}\text{Мпс}^{-1}$$

$$\tau_0 = H_0^{-1} = 1,36 \pm 0,15 \times 10^{10} \text{лет}$$

$$-0,02 \leqslant kc^2/R_0^2 H_0^2 \leqslant 0,02$$

$$\lambda_0 = 0,7 \pm 0,2$$

$$\Omega_0 = 0,3 \pm 0,1$$

По-видимому, мы располагаем самосогласованным набором параметров, соответствующим пространственно плоской Вселенной.

Значение плотности, соответствующее модели Эйнштейна-де Ситтера $\Lambda = 0$ (критическая плотность)

$$\rho_{ES} = 3H_0^2/8\pi G = 5 \times 10^{-27}(H_0/50^{-1-1})^{2-3}$$

Это граница при $\Lambda = 0$ между пульсирующей и монотонно расширяющейся Вселенными.

Возраст Вселенной

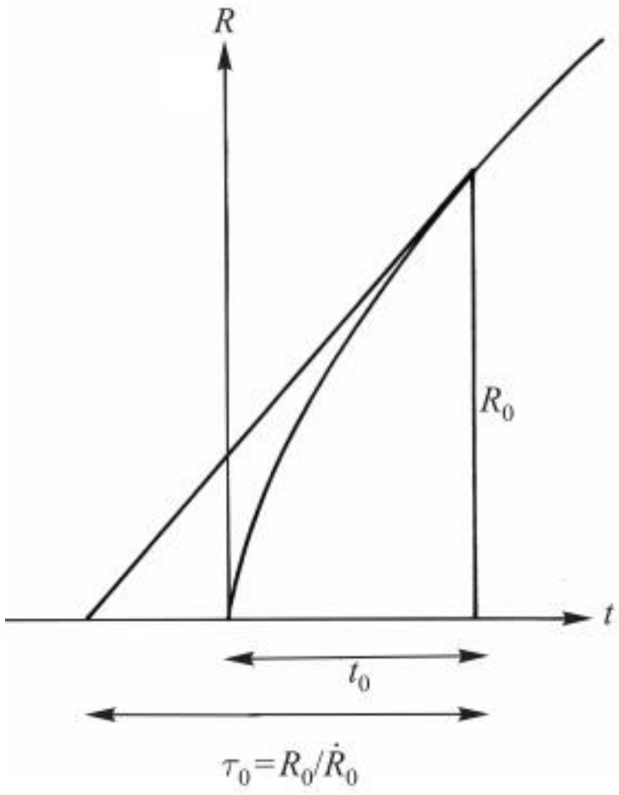
$$t_0 = \int\limits_0^{t_0} dt = \int\limits_0^{R_0} \frac{dR}{\dot{R}}$$

Можно перейти к введённым параметрам для случая Λ = 0

$$t_0 = \tau_0 \int\limits_0^1 \frac{dx}{(2q_0/x + 1 - 2q_0)^{1/2}} \qquad x = R/R_0$$

Если $q_0 = 0$, то $t_0 = \tau_0$; если же $q_0 = 1/2$, то $t_0 = 2\tau_0/3$.

Интеграл можно вычислить, однако очевидно, что возраст Вселенной не может превышать времени Хаббла.



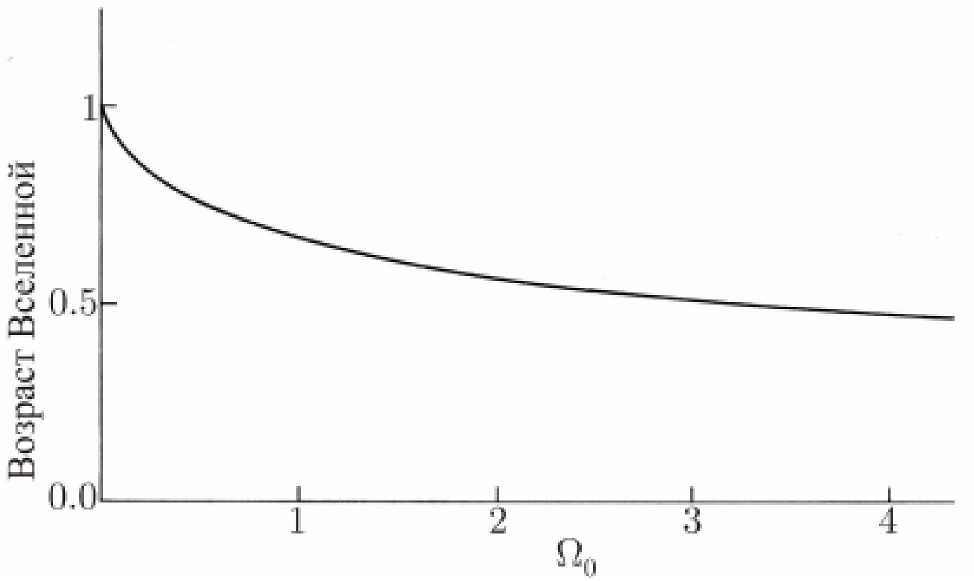
Возраст Вселенной

Для случая Λ ~= 0

$$t_0 = \int\limits_0^{t_0} dt = \int\limits_0^{R_0} \frac{dR}{\dot{R}} = \tau_0 \int\limits_0^1 [\Omega_0/x - 3\Omega_0/2 + q_0 + 1 + (\Omega_0/2 - q_0)x^2]^{-1/2}$$

для $k = 0$ и соответственно $\lambda_0 + \Omega_0 = 1$:

$$\begin{array}{rcccccc} \Omega_0 = 1 - \lambda_0 = & 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,5 & 1, \\ t_0/\tau_0 = & 1,49 & 1,28 & 1,08 & 0,96 & 0,83 & 0,67. \end{array}$$



Тепловая эволюция

Предположения

- Вселенная расширяется адиабатически, что требует гипотеза об изотропии (исключая стадию инфляции).
  При нарушении адаибатичноти во Вселенной могут возникать и быстро увеличиваться направленные потоки «тепла» (вещества). Это означает, что генерация энтропии невелика.
  Условие не является обязательным, но на практике выполняется.

- Тепловое равновесие может поддерживаться несмотря на расширение – зависит от частоты столкновения частиц.
  Можно использовать уравнения термодинамики для случая термодинамического равновесия.
  <u>Однако, это условие может не выполняться для частиц тёмной материи!</u>

- Космические «жидкости» (электроны, фотоны, частицы тёмной материи и др.) можно рассматривать как идеальные газы.
  Это не совсем верно из-за наличия дальнодействующего электромагнитного взаимодействия, однако, если рассмотреть локальное возмущение плотности, оно будет электрически нейтральным из-за притяжения в эту области как протонов, так и электронов. Эффективный радиус электромагнитного взаимодействия не будет подчиняться закону 1/r.

Свойства идеальных квантовых газов

- Для релятивистских бозонных и фермионных идеальных газов в тепловом равновесии справедливы соотношения:

концентрация частиц

$$n_B = 10 g_B \left(\frac{T}{K}\right)^3 \text{см}^{-3} = 1.6 \cdot 10^{13} g_B \left(\frac{k_B T}{eV}\right)^3 \text{см}^{-3}$$

$$n_F = \frac{3}{4}\frac{g_F}{g_B} n_B$$

плотность энергии

$$u_B = 3.8 \cdot 10^{-15} g_B \left(\frac{T}{K}\right)^4 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} = 2.35 \cdot 10^{-3} g_B \left(\frac{k_B T}{eV}\right)^4 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$$

$$u_F = \frac{7}{8}\frac{g_F}{g_B} u_B$$

Тепловая эволюция

Свойства идеальных квантовых газов

- Для релятивистских бозонных и фермионных идеальных газов в тепловом равновесии справедливы соотношения:

давление частиц

$$P_B = \frac{u_B}{3}$$

$$P_F = \frac{u_F}{3}$$

энтропия

$$\frac{s_B}{k_B} = 36 g_B \left(\frac{T}{K}\right)^3 \text{см}^{-3} = 5.7 \cdot 10^{13} g_B \left(\frac{k_B T}{eV}\right)^3 \text{см}^{-3}$$

$$s_F = \frac{7}{8}\frac{g_F}{g_B} s_B$$

Тепловая эволюция

Согласно первому закону термодинамики

$$dE = -pdV$$

Уравнение эквивалентности массы и энергии

$$E = Mc^2$$

$$E = (\rho_m + \rho_r)Vc^2 = \rho V c^2$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) + \frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(R^3) = 0$$

Тепловая эволюция

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\rho R^3) + \frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(R^3) = 0}$$

Вселенная, содержащая только вещество

$$\frac{d}{dt}(\rho_m R^3) = 0$$

$$\rho_m \propto R^{-3}$$

Вселенная, содержащая только излучения

$$p_r = \rho_r c^2/3$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_r R^3) + \frac{1}{3}\rho_r \frac{d}{dt}(R^3) = 0$$

$$3\rho_r R^2 \dot{R} + \dot{\rho}_r R^3 + \rho_r R^2 \dot{R} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_r R^4) = 0$$

$$\rho_r = \rho_{r,0}(R(t)/R_0)^{-4}$$

Тепловая эволюция

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) + \frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(R^3) = 0$$

Вселенная с излучением и веществом.

Если пренебречь вкладом в общее давление нерелятивистского вещества

$$\frac{d}{dt}(\rho_m R^3) + \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(\rho_r R^4) = 0$$

Если допустить полное сохранение вещества (допустить отсутствие превращения вещества в излучение, то)

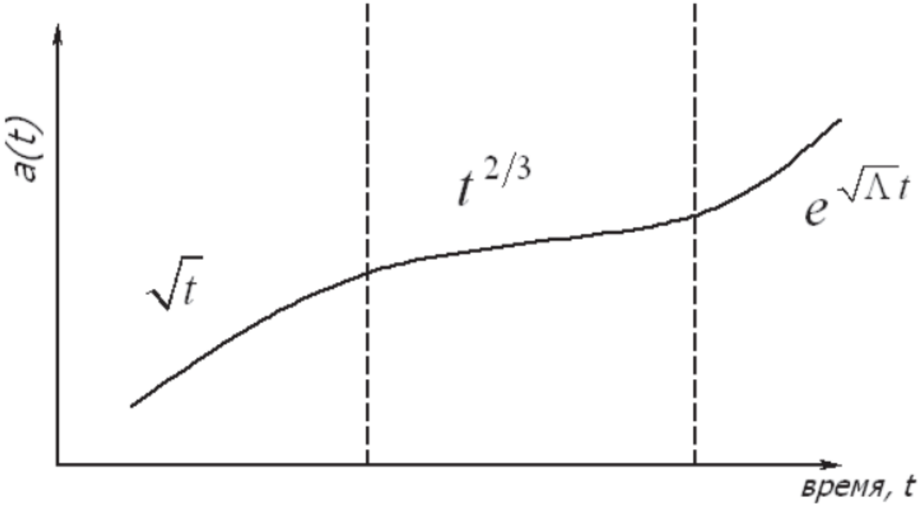
$$\frac{d}{dt}(\rho_m R^3) = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\rho_r R^4) = 0$$

$$\rho_m = \rho_{m,0}(R/R_0)^{-3} \qquad \rho_r = \rho_{r,0}(R/R_0)^{-4}$$

Т.е. в прошлом была эпоха, когда доминировало излучение

$$R_{crit} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}} R_0$$

Тепловая эволюция



Расширение шкалы времени во время радиационно-доминированной эпохи

$$t_{exp} \approx (G\rho)^{-1/2} \propto a^2$$

Расширение шкалы времени во время пылевой стадии происходит медленнее

$$t_{exp} \propto a^{3/2}$$

- Если предположить, что в самой ранней Вселенной существует тепловое равновесие между фотонами и частицами (лептонами, барионами, тёмной материей), то с ростом размеров Вселенной их температуры будут значительно различаться как только какая-то компонента выходит из теплового равновесия.
- По этой причине говорить о температуре Вселенной не имеет смысла. Каждая компонента имеет свою температуру.