Происхождение Вселенной

Лекция 16.11.2020

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2}\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + \underbrace{r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2}_{r^2 d\Omega^2}\right)$$

$$\ddot R = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)R + \frac{\Lambda R}{3} \quad ; \quad r = R(t)$$

$$\dot R^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - kc^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} \qquad \rho(t) = \rho_0\left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3$$

Классификация космологических моделей

I. $\Lambda = 0$

1) $\rho \to 0$ $\quad \dot R^2 = -kc^2$

$k > 0$

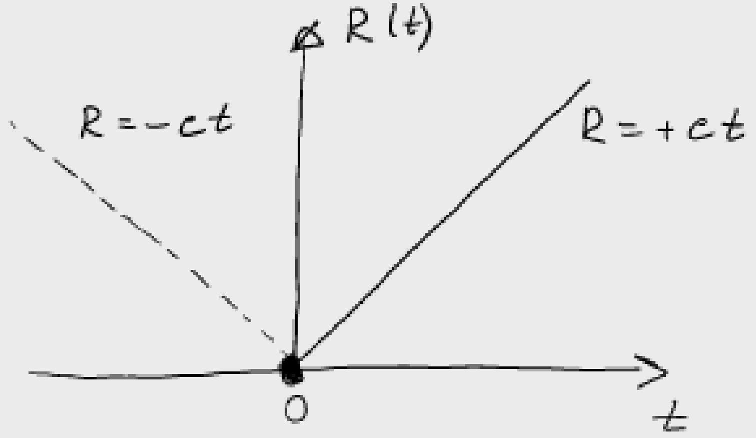
$k = 0$

$k < 0$ $\quad \dot R^2 = |k|c^2$

$\dot R^2 = c^2$

$R(t) = \pm ct$

$t = 0 \Rightarrow r = 0$



Модель Милна

2) Модели Эйнштейна - де Ситтера

$k = +1$

$k = 0$

$k = -1$

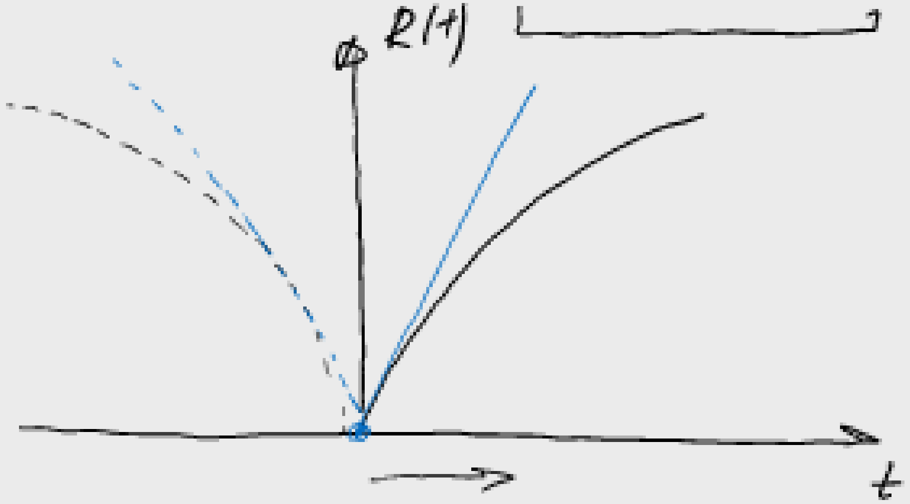
• $\underline{k = 0}$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 R_0^3}{R}$$

$$R^{1/2} dR = \pm \underbrace{\left(8\pi\rho_0 R_0^3\right)^{1/2}}_{const} dt$$

$$\hookrightarrow \quad R(t) = \pm R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad ; \quad t_0 - const = \left(\frac{3}{2}\left(8\pi\rho_0 R_0\right)^{1/2}\right)^{2/3}$$

$$\underline{R(t) \sim t^{2/3}}$$



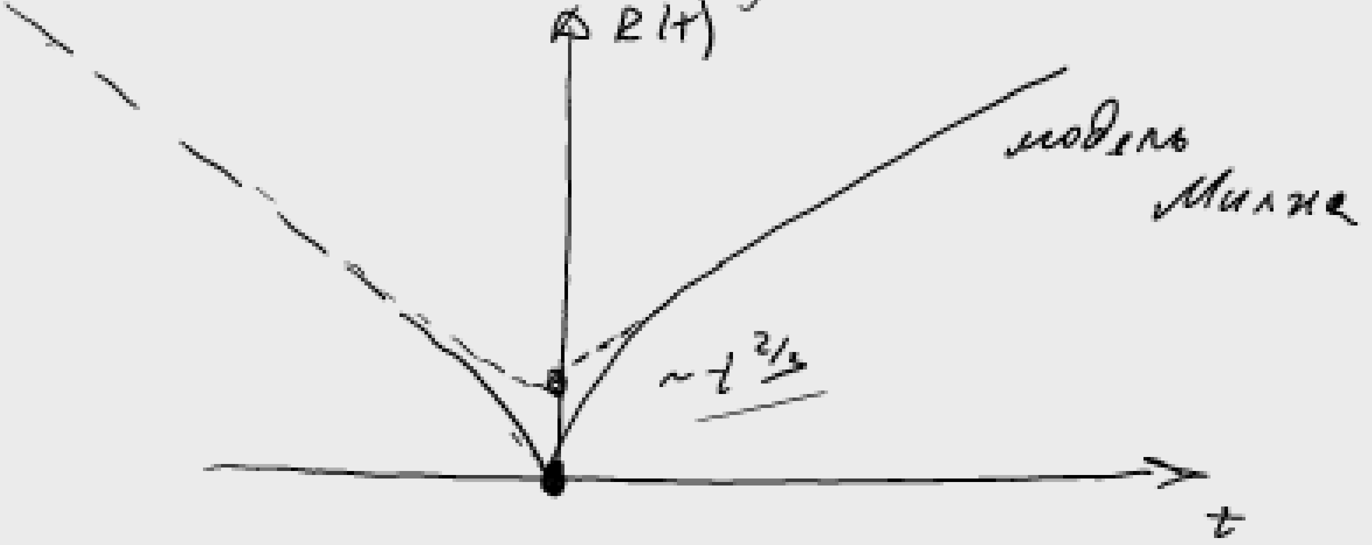
монотонное решение

- $k = -1$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \underline{+ c^2}$$

$\rho > 0 \Rightarrow \dot{R}^2 > 0$ в $\forall$ время

$t \to \infty \Rightarrow \rho \to 0 \Rightarrow \dot{R}^2 = c^2$



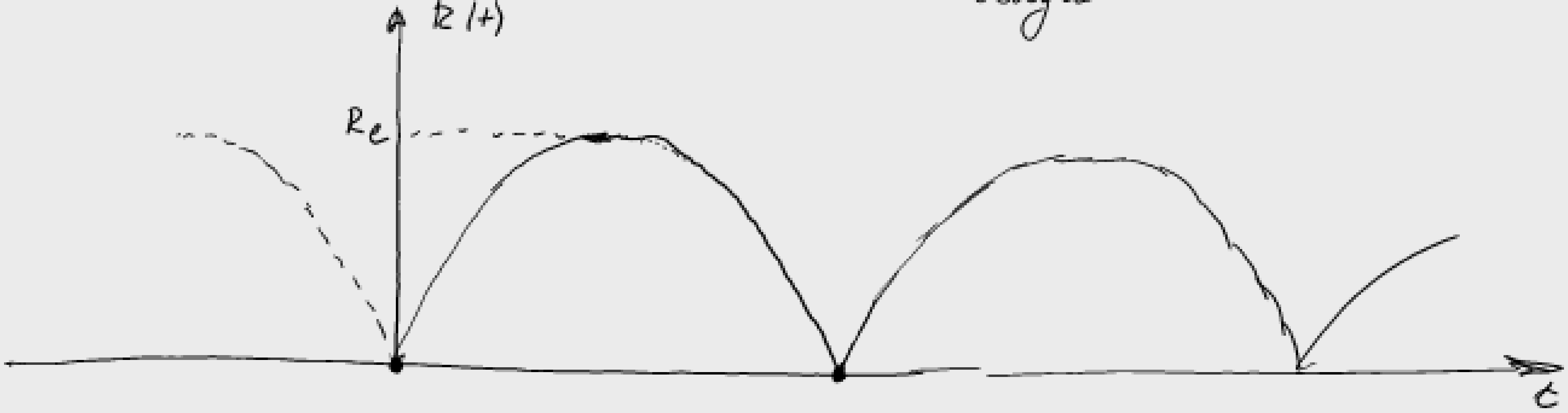
• $k = +1$ $\qquad \dot R^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - c^2 \qquad \frac{=0}{>0} \Rightarrow R_e^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho} = \frac{3c^2}{8\pi G\rho_0}\frac{R_e^3}{R_0^3}$

$$R_e = \frac{8\pi G\rho_0}{3c^2}\cdot R_0^3$$

$\dot R = 0$

$$\ddot R = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)R < 0$$

всегда



модель пульсирующей Вселенной

10^{-36} c ÷ $(4-5)\cdot 10^9$

II $\quad \Lambda \neq 0$

$$l_u \sim 10^{28}\text{ см} \sim l_\Lambda \sim \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$

$$\Lambda \sim 10^{-56}\text{ см}^{-2}$$

$$\Lambda^{РЧ} \simeq (1{,}2 \div 1{,}3)\cdot 10^{-56}\text{ см}^{-2} \quad (\Lambda CDM)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{\rho_0 R_0^3}{R} - kc^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} = G(R)$$

1) $\Lambda < 0 \qquad \dot{R}^2 > 0 \qquad \frac{8\pi}{3} G \frac{\rho_0 R_0^3}{R} > kc^2 + \frac{|\Lambda| R^2}{3}$

$$\exists\ R_c \leftarrow \dot{R} = 0$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) R - \frac{|\Lambda| R}{3} < 0 \text{ всегда}$$

пульсирующие модели при $\forall k$

2) $\Lambda > 0$

- $k \le 0$ $\quad \dot R^2 > 0$ всегда

$k \sim 0$ $\quad \dot R^2 = \frac{\Lambda R^2}{3} \Rightarrow \dot R = \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} R$

$$\underbrace{R \sim e^{(\Lambda/3)^{1/2} \cdot t}}_{\text{вторая инфляция}}$$

- $k = +1$

$$\dot R^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{\rho_0 R_0^3}{R} - c^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} = G(R)$$

$$\ddot R = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) R + \frac{\Lambda R}{3} = 0$$

$\exists\, \Lambda_c : \dot R = 0, \ \ddot R = 0$ $\quad$ Пусть $p \to 0$, тогда

$$\frac{\Lambda_c R}{3} = \frac{4\pi}{3} G \rho R \Rightarrow \Lambda_c = 4\pi G \rho_c$$

$$0 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c R_c^2 - c^2 + \frac{\Lambda_c R_c^2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \Lambda_c R_c^2 - c^2 + \frac{\Lambda_c R_c^2}{3} = 0$$

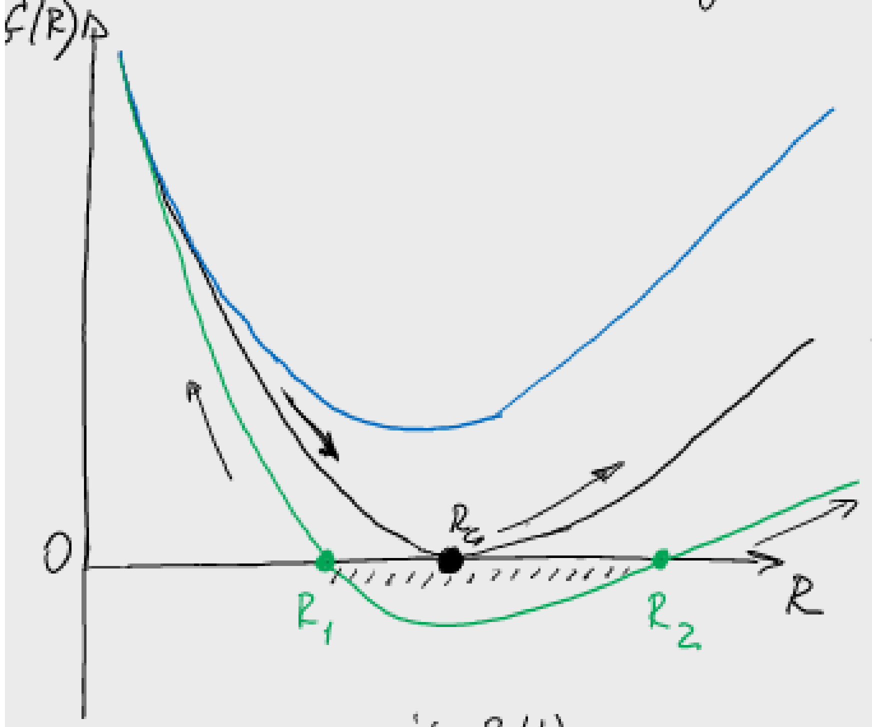
$$\Lambda_c R_c^2 = c^2$$

$$\Lambda_c = \frac{c^2}{R_c^2}$$

$R = R_c$ при $\Lambda = \Lambda_c$

$\hookrightarrow \ddot R = 0 \quad \dot R = 0$

Статическая модель Эйнштейна

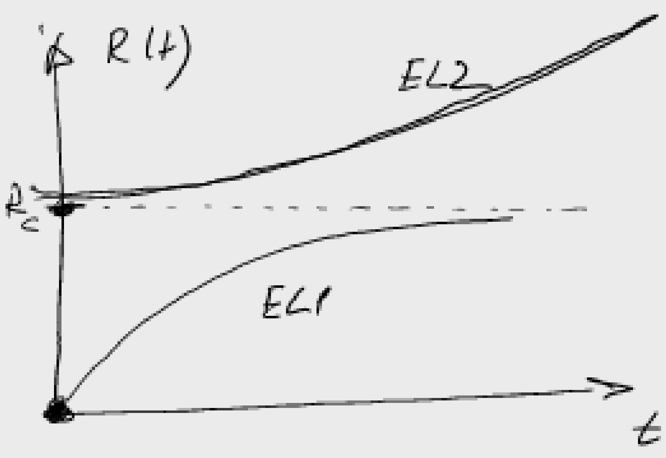


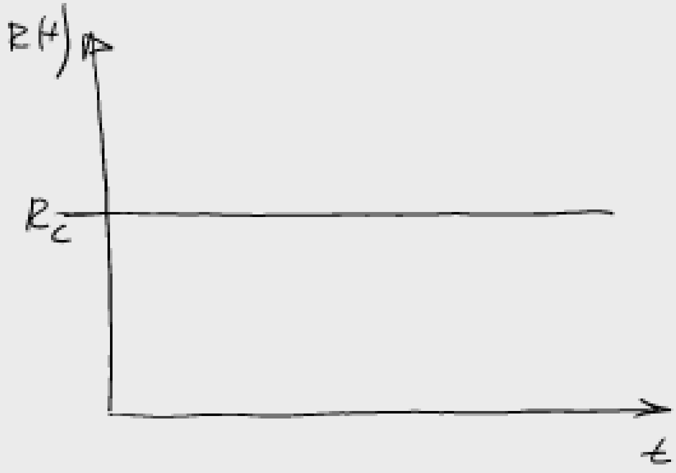
$\Lambda > \Lambda_c$: $\dfrac{\Lambda R^3}{3} > \dfrac{\Lambda_c R^3}{3}$ $G(R) > 0$ всегда

$\Lambda = \Lambda_c$

$\Lambda < \Lambda_c$ $\dfrac{\Lambda R^3}{3} < \dfrac{\Lambda_c R^3}{3}$

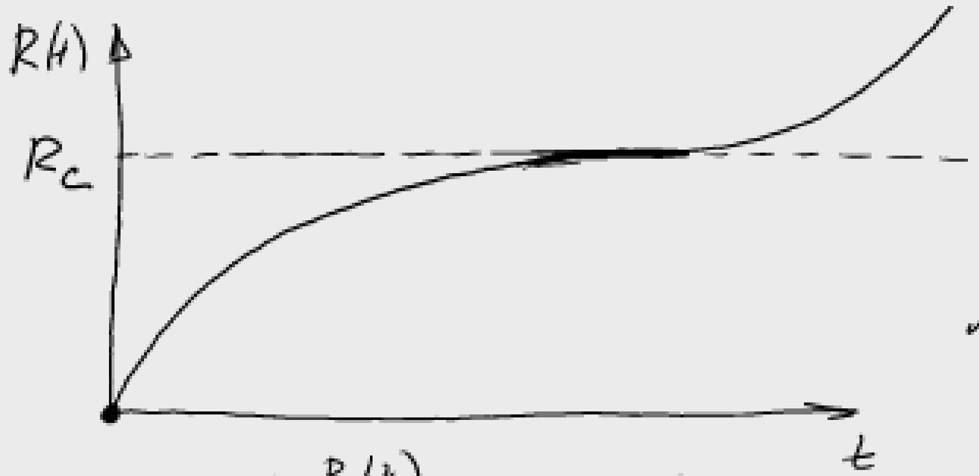
$\Lambda = \Lambda_c$



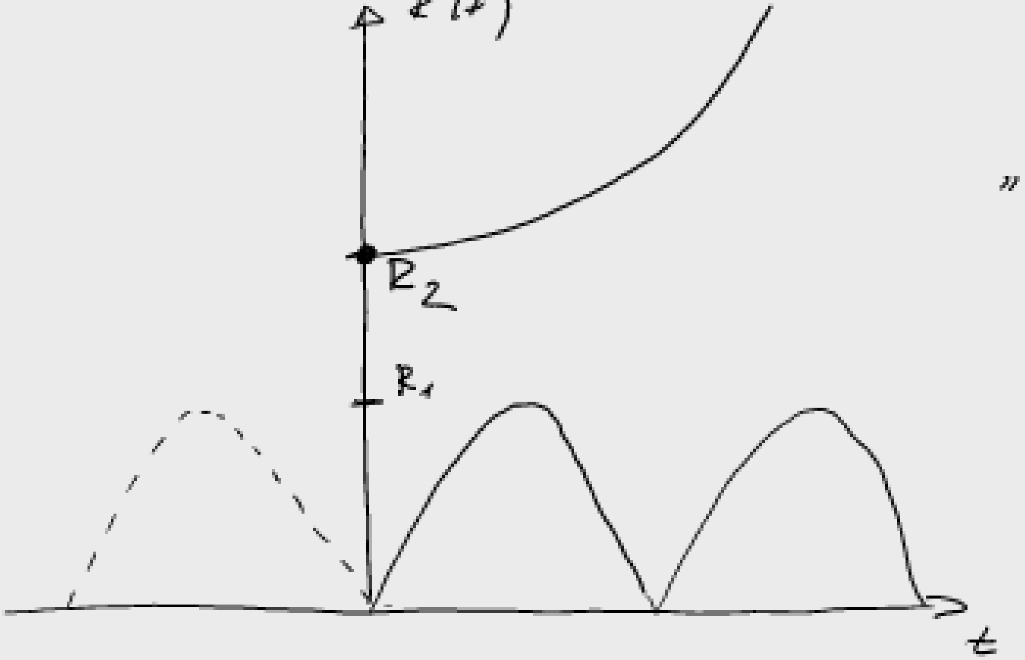


Модели Эддингтона – Леметра

$\Lambda = \Lambda_c(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon = fun(t)$



модель Леметра



„подпрыгивающая" Вселенная.

пульсирующие Вселенные

Космологическая постоянная.

1) „Силовая" интерпретация

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho - \Lambda \cdot c^2 \quad \text{— ур-ие Пуассона}$$

$$\varphi = \varphi_G + \varphi_\Lambda$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \qquad \Delta\varphi = -\Lambda c^2$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\varphi_\Lambda\right) = -\Lambda c^2$$

$$\varphi_\Lambda = -\frac{1}{6}\Lambda c^2 r^2$$

$$\boxed{\vec{F}_\Lambda = -m\vec{\nabla}\varphi_\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda m c^2 \vec{r}}$$

- $\Lambda > 0 \rightarrow$ отталкивание
  $\Lambda < 0 \rightarrow$ притяжение
- $F_\Lambda \sim r$

2) Вакуумная интерпретация

$p_v = -\varepsilon_v$

$$\begin{cases} \varepsilon_v > 0 \\ -\varepsilon_v \le p_v \le \varepsilon_v \end{cases}$$

$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = \bar{k} T^{ik} + \Lambda g^{ik}$ — уравнения Эйнштейна

$i, k = 0 \dots 3$

материя

$\bar{k} = \frac{8\pi G}{c^4}$

$= \bar{k}\left(T^{ik} + \frac{\Lambda}{\bar{k}} g^{ik}\right)$

T_v^{ik}

$T^{ik} = (\varepsilon_v + \cancel{p_v})u^i u^k - p_v g^{ik} = \varepsilon_v g^{ik}$, $\cancel{p_v} \to 0$

$T_v^{ik} = \frac{\Lambda}{\bar{k}} g^{ik}$

$$\boxed{\varepsilon_v = \frac{\Lambda}{\bar{k}}}$$

$\Lambda = \bar{k} \cdot \varepsilon_v > 0$

$\Lambda > 0$

$\Lambda = const \to \varepsilon_v = const$

$l_\Lambda \sim \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \sim l_H \sim 10^{28}$ см

$\Lambda \sim 10^{-56}$ см$^{-2}$

$\Lambda^{PH} \sim 1{,}2 \cdot 10^{-56}$ см$^{-2}$